Bons et mauvais prix : fiche pour les animateurs

Pour timbrer mes lettres, je n'ai que des timbres de 4 euros et de 7 euros. Si je dois timbrer une lettre à 8 euros, ça va... mais pour une lettre à 9 euros, je suis obligé de mettre 11 euros et je perds 2 euros !" Partant de ce petit problême, qui fait travailler les additions, nous proposons d'aborder l'expérimentation mathématique et (éventuellement) la notion de divisibilité.

En cycles 2 et 3, on fait examiner quelques cas simples aux élèves : timbres de $a = 2$ et $b = 3$, puis $a = 2$ et $b = 5$, etc. On collecte les résultats et on essaie de deviner le nombre et la répartition des montants d'affranchissement qui nous font perdre de l'argent.

Au Rallye de l'an dernier, l'activité était présentée avec des paiements auprès de commerçants qui ne rendent pas la monnaie, plutôt qu'avec des timbres. On parlait de bons prix (ceux qu'on peut paye exactement) et de mauvais prix (ceux qui nous font perdre de l'argent). Voici quelques résultats :
1) si a et b ne sont pas premiers entre eux, tous les prix payables sont multiples de $d = \text{pgcd}(a, b)$ et il n'y a évidemment pas de plus grand mauvaix. Dans ce cas-là, on a $a = da'$ et $b = db'$, et c'est pour a' et b' que le problème posé est intéressant.
2) si a et b sont premiers entre eux, il y a un plus grand mauvais prix m.
3) on a une formule exacte $m = ab-(a+b)$. Le problème analogue de trouver une formule exacte pour le plus grand mauvais prix (qui existe) avec trois entiers premiers entre eux a, b, c (ou $n \geq 3$ entiers premiers entre eux) est ouvert.
4) il y a exactement $\frac{m-1}{2} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$ mauvais prix.

En plus des exercices de dénombrement et de calcul correspondant aux exemples, un premier objectif raisonnable est d'essayer de faire sentir ou dire aux élèves que si a et b sont tous les deux divisibles par un entier $e > 1$, alors il ne peut y avoir de plus grand mauvais prix, mais que sinon il semble qu'il y a un prix à partir duquel on peut tout le temps payer exactement. Notions sous-jacentes : divisibilité, diviseurs commun, pgcd, notion d'entiers premiers entre eux.

Expérimentation

Je ne mets que les couples d'entiers ≤ 7 premiers entre eux :

a	b	Ensemble des mauvais prix	m	$m+a+b$
2	3	$\{1\}$	1	6
2	5	$\{1; 3\}$	3	10
2	7	$\{1; 3; 5\}$	5	14
3	4	$\{1; 2; 5\}$	5	12
3	5	$\{1; 2; 4; 7\}$	7	15
3	7	$\{1; 2; 4; 5; 8; 11\}$	11	21
4	5	$\{1; 2; 3; 6; 7; 11\}$	11	20
4	7	$\{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 13; 17\}$	17	28
5	6	$\{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9; 13; 14; 19\}$	19	30
5	7	$\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 11; 13; 16; 18; 23\}$	23	35
6	7	$\{1; 2; 3; 4; 5; 8; 9; 10; 11; 15; 16; 17; 22; 23; 29\}$	29	42

Sur ces exemples, on constate que l'ensemble des mauvais prix est fini.
De plus, sur ces exemples toujours, $m + a + b$ est toujours égal à ab.

Les trois petites preuves suivantes ne sont évidemment pas ce qu'on imagine de faire faire aux élèves, mais c'est toujours important d'en savoir un peu plus sur l'exercice...

Démonstration du fait que $ab-(a+b)$ est un mauvais prix

Posons $f(a,b) := ab-(a+b)$. Supposons que $ab-(a+b)$ soit un bon prix, c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{N}^2$ tels que $ab-(a+b)=\lambda a+\mu b$. On en déduit $ab=(\lambda+1)a+(\mu+1)b$. Ainsi a divise $(\mu+1)b$ donc, comme a et b sont premiers entre eux, par le lemme de Gauß on obtient que a divise $\mu+1$. De même, on montre que b divise $\lambda+1$:

$$\begin{gathered}\exists\mu'\in\mathbb{N},\ \mu+1=\mu'a\\ \exists\lambda'\in\mathbb{N},\ \lambda+1=\lambda'b\end{gathered}$$

On a donc $ab=\lambda'ab+\mu'ab$ d'où en divisant par ab : $1=\lambda'+\mu'$. Nécessairement, $\lambda'=0$ ou $\mu'=0$ (sinon leur somme serait au moins égale à 2). Cela implique alors que $\lambda+1=\lambda'b=0$ (si $\lambda'=0$) ou que $\mu+1=\mu'a=0$ (si $\mu'=0$). C'est impossible puisque $\lambda\geq 0$ et $\mu\geq 0$. Cela signifie donc que $ab-(a+b)$ est un mauvais prix.

Démonstration du fait que tout prix $p\geq f(a,b)+1$ est un bon prix

Soit donc $p\in\mathbb{N}$ tel que $p\geq ab-(a+b)+1$. Considérons l'écriture de Bézout unique $p=\lambda a+\mu b$ avec $0\leq\lambda\leq b-1$. Montons qu'on a alors $\mu\geq 0$. En effet, sinon on a $\mu\leq -1$ donc

$$p=\lambda a+\mu b\leq (b-1)a-b=ab-a-b$$

or on a supposé le contraire. Donc $p=\lambda a+\mu b$ avec $\lambda\geq 0$ et $\mu\geq 0$, c'est-à-dire que p est un bon prix.

La conclusion est que le plus grand mauvais prix est $m=ab-(a+b)$, en particulier, il n'y a qu'un nombre fini de mauvais prix.

Décompte du nombre exact de mauvais prix

Soit $E=\{0,1,\ldots,m\}$, on montre que $i(x)=m-x$ échange les bons et les mauvais prix de E, c'est-à-dire que si p est un bon prix alors $m-p$ est un mauvais prix, et si p est un mauvais prix alors p est un bon prix.

Supposons que p est un bon prix. Si $m-p$ était aussi un bon prix, alors la somme $p+(m-p)=m$ serait un bon prix (voir (2)). Ceci n'est pas vrai. Donc, $m-p$ est un mauvais prix.

Supposons maintenant que p est un mauvais prix et montrons que $m-p$ est un bon prix. Considérons l'écriture de Bézout unique de $m-p$, c'est-à-dire $m-p=\lambda a+\mu b$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ et $0\leq\lambda\leq b-1$. Il suffit de montrer qu'alors $\mu\geq 0$. Or, on a

$$p=m-(m-p)=m-(\lambda a+\mu b)=ab-(a+b)-(\lambda a+\mu b)=(b-(\lambda+1))a-(\mu+1)b$$

Posons $\lambda':=b-(\lambda+1)$ et $\mu':=-(\mu+1)$, de sorte que $p=\lambda'a+\mu'b$. Vu qu'on a choisi l'écriture de Bézout unique on a $\lambda'\geq 0$, si de plus $\mu'\geq 0$ alors p serait un bon prix, contrairement à l'hypothèse. Ainsi, $\mu'<0$ i.e. $\mu\geq 0$ qui est ce qu'on voulait montrer. Donc $m-p$ est un bon prix.