

Description de l'activité

Chasse à la bête

Niveaux concernés : primaire (à partir de ??), collège, voire lycée.

Effectif : si possible en demi-classe, possible en classe entière.

Durée de l'atelier : entre 30 et 60 minutes.

Matériel à prévoir : imprimer les plateaux de jeux, les "bêtes" et les "pièges" disponibles en [annexe](#).

Objectif. Travailler les notions d'exemple et de contre-exemple, d'encadrement (majoration, minoration), de condition nécessaire et/ou suffisante, de conjecture, de démonstration, d'optimalité, de pavage.

Explication de l'activité. On se donne un plateau de jeu représentant un champ. Ce champ est envahi par des bêtes ! Notre but est de poser des pièges à bêtes dans le champ pour le protéger de toute intrusion... mais les pièges coûtent cher ! Nous voulons donc en poser le moins possible. De combien de pièges avons-nous besoin *au minimum* ?

Concrètement, le plateau de jeu est découpé en 25 cases (5x5). Un piège est un carré qui occupe exactement 1 case. Une bête est un polymino : domino, trimino droit ou trimino coudé, comme représentés ci-dessous

(voir figure 1), qui occupe 2 ou 3 cases adjacentes. Les bêtes comme les pièges ne peuvent pas être posés autrement que sur des cases entières.

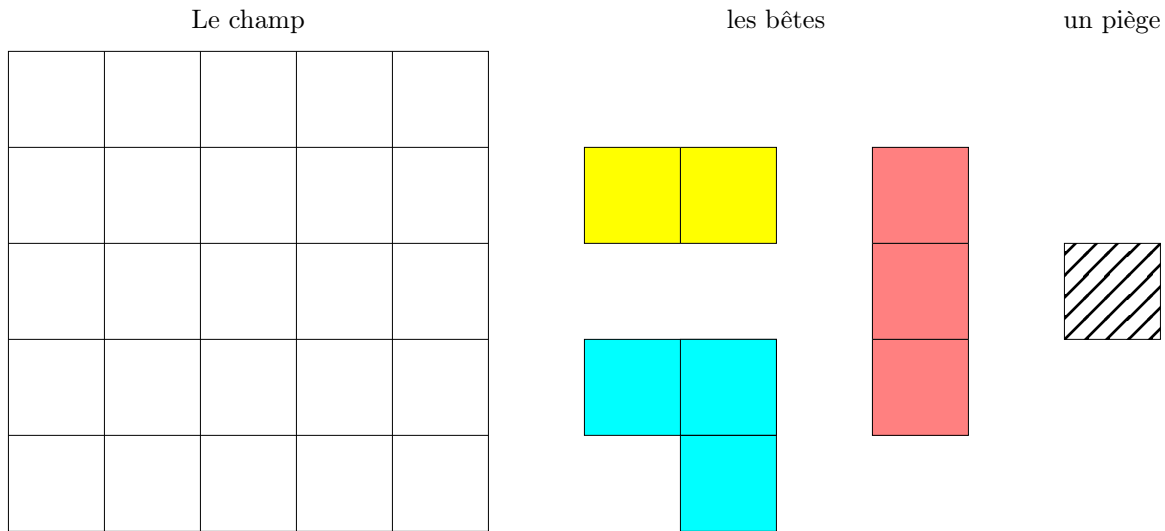


Figure 1: présentation du matériel.

On travaille avec les différentes formes de bêtes les unes après les autres, sans les mélanger. Nous utilisons 2 arguments différents, qui nous donnent respectivement une minoration et une majoration du nombre minimal N de pièges à poser pour protéger tout le plateau.

- D'une part, si on a trouvé une configuration à p pièges qui empêche toute bête de s'installer sur le plateau, alors $N \leq p$: le nombre minimum de pièges nécessaire est inférieur au nombre de pièges trouvé.
- D'autre part, si on arrive à placer q bêtes simultanément sur le plateau en l'absence de pièges, alors $N \geq q$ car, les bêtes ne se superposant pas, il faudra au moins un piège pour neutraliser chacune de ces q bêtes et l'empêcher de s'installer.

Si on arrive, pour un certain entier r , à empêcher toute bête de s'installer avec r pièges, *et* à placer (quand il n'y a pas de piège) r bêtes simultanément sur le plateau, nous avons alors répondu à la question et $N = r$.

Remarque. On connaît a priori un majorant du nombre de bêtes que l'on peut poser. S'il y a 25 cases, comme $2.13 > 25$ et $3.9 > 25$, on ne pourra pas poser plus de 12 bêtes dominos et plus de 8 bêtes triminos.

Si les bêtes sont des dominos,

- on peut protéger tout le champ avec 12 pièges (voir la 2ème solution présentée dans la figure 2)
- on peut placer simultanément 12 bêtes sur le plateau (voir figure 3)

donc on conclut que $N = 12$: le nombre minimal de pièges pour protéger tout le champ est 12.

Si les bêtes sont des triminos droits,

- on peut protéger tout le champ avec 8 pièges (voir figure 7)
- on peut placer simultanément 8 bêtes sur le plateau (voir figure 6)

donc on conclut que $N = 8$: le nombre minimal de pièges pour protéger tout le champ est 8.

Si les bêtes sont des triminos coudés,

- on peut protéger tout le champ avec 10 pièges (voir figure 8)
- on peut placer simultanément 8 bêtes sur le plateau (voir figure 8)

donc on ne peut pas conclure par cet argument, on peut seulement affirmer que N est égal à 8, 9 ou 10. Pour en savoir plus sur ce cas, on pourra consulter à la fin de la fiche les explications "pour aller plus loin".

Mise en œuvre.

En classe de CE, nous pourrons nous consacrer uniquement aux bêtes en forme de dominos. En CM, nous pourrons étudier également les bêtes en

forme de triminos longs. Si nous avons un peu de temps pour approfondir, ou en collège, nous pourrions également nous intéresser au cas des triminos coudés, pour que les élèves remarquent que la méthode qui a fonctionné dans les deux premiers cas ne permet pas toujours de conclure. Des explications complémentaires sur le cas des triminos coudés, à destination des enseignants, se trouvent dans la rubrique "Pour aller plus loin".

Étape 1 : les dominos

Dans un premier temps, nous proposons aux élèves de travailler uniquement avec les bêtes en forme de domino. Une bête, pour s'installer dans le champ, a donc besoin de 2 cases adjacentes libres de tout piège et de toute autre bête. Nous demandons d'abord aux élèves comment poser des pièges dans le champ pour le protéger de toute bête, en utilisant le moins de pièges possible. Chaque élève a devant lui un plateau de jeu, des pièges et des bêtes. Deux solutions émergent de leurs manipulations, en plaçant les pièges en quinconce (comme les cases noires ou blanches d'un plateau d'échec) : une solution à 13 pièges, et une solution à 12 pièges, suivant qu'on place un piège ou non dans les coins du plateau (voir figure 2). Les élèves ont trouvé une solution à 12 pièges, reste à savoir si 12 est le nombre *minimum* de pièges nécessaires pour protéger le champ : peut être pourrait-il exister une solution à 11 pièges à laquelle ils n'ont pas pensé ? Il faut insister à ce stade sur le fait qu'ils n'ont pas entièrement répondu à la question jusqu'ici. Proposons alors aux élèves de mettre de côté les pièges, et de placer dans le champ le plus de bêtes possible. Rappelons que ces bêtes n'ont pas le droit de se chevaucher. On peut, de bien des façons, placer 12 bêtes sur le plateau, par exemple dans la configuration représentée en figure 3. En passant, nous pouvons demander aux élèves si

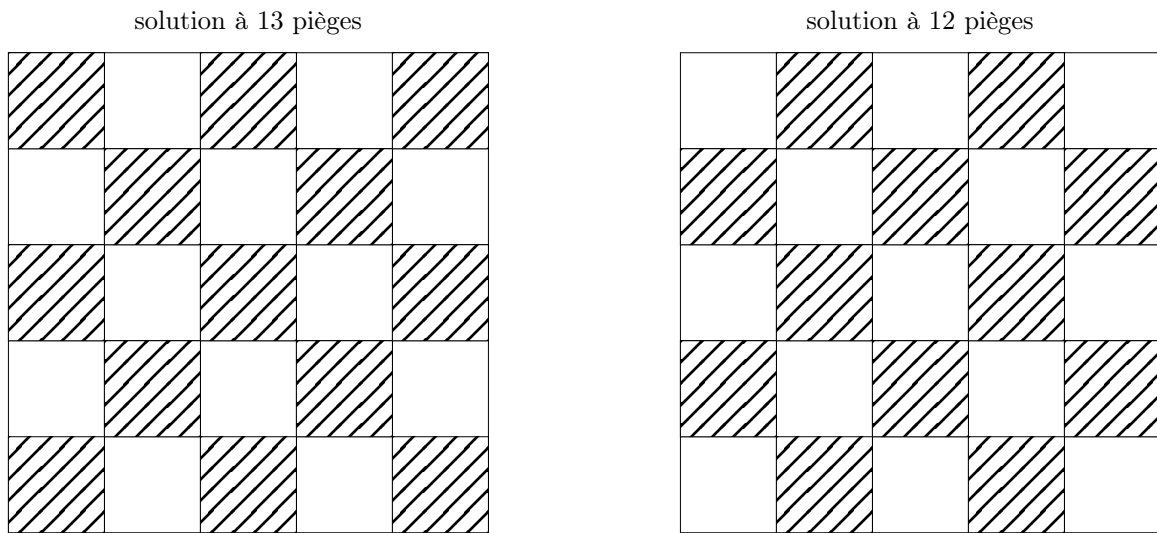


Figure 2: deux configurations de 13 et 12 pièges qui protègent tout le champ des bêtes en forme de dominos.

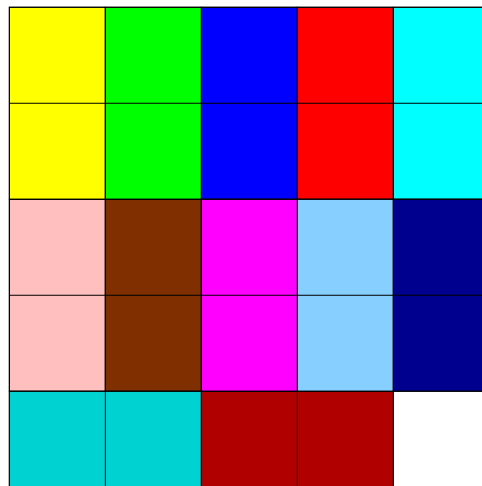


Figure 3: un exemple de placement de 12 bêtes dominos dans le champ (les différentes bêtes sont représentées de différentes couleurs).

nous pouvons en placer plus. À cette question les élèves peuvent répondre par la négative, pour poser 13 bêtes, on a besoin de 26 cases. Le nombre *maximal* de bêtes qui peuvent s'installer dans le champ simultanément est donc 12.

Demandons donc maintenant aux élèves s'il peut exister une solution à 11 pièges (ou moins), alors que 12 bêtes peuvent se poser simultanément dans le champ. La réponse est non, car 11 pièges neutraliseront au plus

11 bêtes, et donc au moins une de nos 12 bêtes sur le plateau restera libre de s'installer. Nous avons donc montré qu'il faut *au moins* 12 pièges pour protéger tout le plateau. Puisque nous avons trouvé un agencement de 12 pièges qui protège effectivement tout le champ, le *nombre minimal* de pièges à poser pour protéger tout le champ est 12.

Étape 2 : les triminos droits

Commençons par récapituler notre démarche avec les élèves, dans le cas des bêtes en forme de dominos. Nous avons été amenés à

- proposer des configurations de pièges, pour *majorer* N , le nombre minimal de pièges à poser pour protéger le champ ;
- placer des bêtes dans le champ, pour *minorer* N .

Suivant le temps à disposition, on pourra répartir les élèves par binômes : l'un va essayer de placer des pièges dans le champ pour le protéger en utilisant le moins de pièges possible, tandis que l'autre va essayer d'installer dans le champ le plus grand nombre de bêtes possible. Les solutions sont moins évidentes, et ne sont pas uniques.

En ce qui concerne le placement des bêtes, les élèves arrivent assez vite à en placer 7 sur le plateau, par exemple en plaçant une bête horizontalement à gauche de chaque ligne, puis une bête verticalement dans chacune des deux colonnes de droite (voir figure 4). Il reste alors 4 cases vides dans le champ, mais elles sont placées dans un carré 2x2, ce qui ne permet pas à une bête de s'y installer. On peut alors suggérer aux élèves de tenter d'autres agencements des bêtes pour placer une 8^{ème} bête sur le plateau (on sait déjà qu'on ne pourra pas en placer 9). Si besoin est de leur donner un coup de pouce, nous pouvons leur suggérer dans cette configuration de

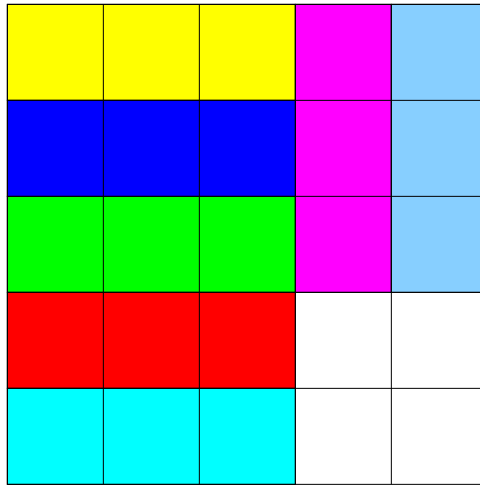


Figure 4: un exemple de placement de 7 bêtes en forme de triminos droits dans le champ (les différentes bêtes sont représentées de différentes couleurs).

décaler les deux bêtes des deux lignes du bas pour qu'elles aillent combler ces 4 cases vides si mal placées ; reste alors à tourner en position verticale la bête placée horizontalement sur la troisième ligne pour faire de la place à une 8^{ème} bête (voir figure 5). Ainsi on peut placer 8 bêtes sur le plateau

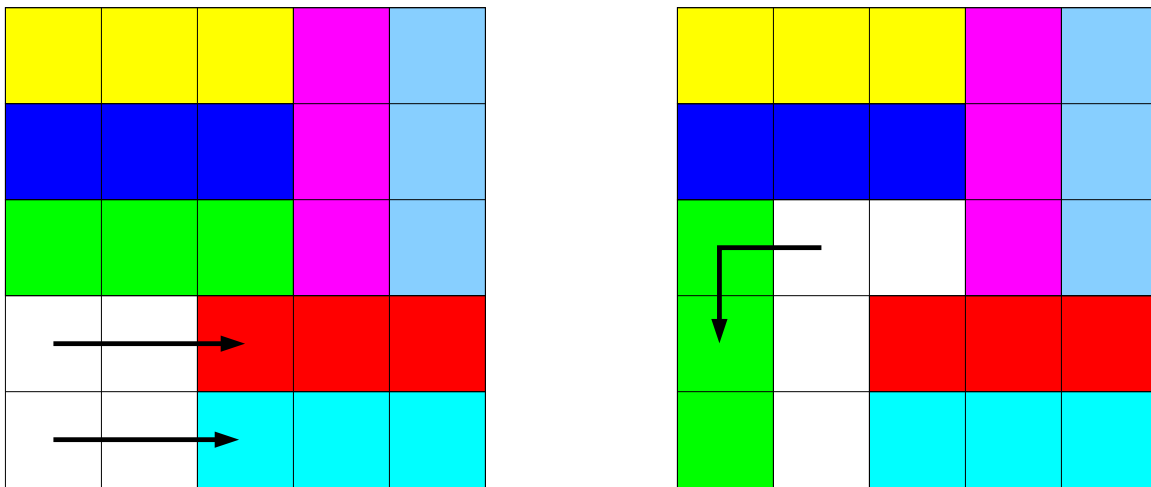


Figure 5: comment bouger ces 7 bêtes pour faire de la place à une 8ème bête ?

(voir figure 6). Il faut donc au moins 8 pièges pour protéger le champ. Nous pouvons remarquer que nous ne pourrions pas placer plus de 8 bêtes dans le champ, car encore une fois il ne reste qu'une seule case libre, alors

qu'il en faudrait au moins 3 pour qu'une autre bête s'installe. Le nombre *maximal* de bêtes qu'on peut placer dans le champ est donc 8.

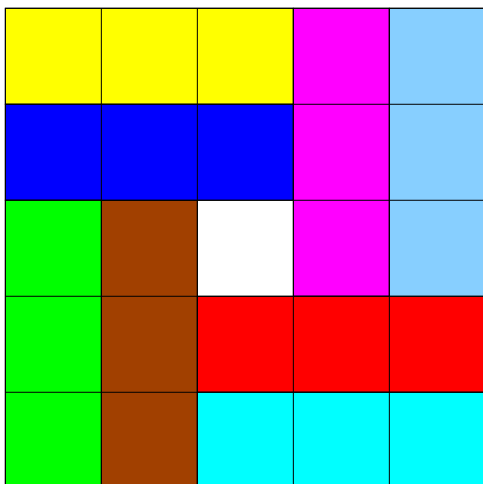


Figure 6: un exemple de placement de 8 bêtes en forme de triminos droits dans le champ (les différentes bêtes sont représentées de différentes couleurs).

En ce qui concerne les pièges, une recherche naïve conduira souvent les élèves à des solutions avec un très grand nombre de pièges : ils placent des pièges au hasard, puis en rajoutent tant que des bêtes peuvent encore s'installer. Nous pouvons leur suggérer d'être plus méthodiques, en essayant globalement :

- d'espacer le plus possible les pièges les uns des autres : cela conduit à des solutions "en quinconce" qui ressemblent à la solution pour les bêtes en forme de domino (nous pouvons d'ailleurs suggérer aux élèves de s'en inspirer), voir la première solution présentée dans la figure 7, *ou*
- de raisonner d'abord ligne par ligne (combien faut-il au minimum de pièges pour éviter qu'une bête ne s'installe sur la première ligne, et où faut-il la placer ? et sur les autres lignes ?) puis colonne par colonne : cela conduit à une solution "en croix", voir la deuxième solution dans

la figure 7.

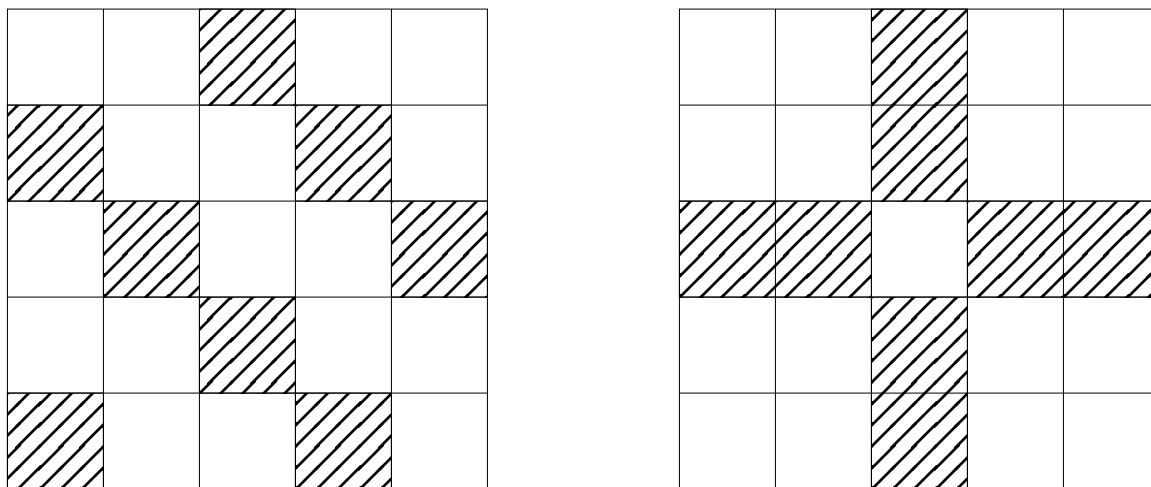


Figure 7: deux configurations de 8 pièges qui protègent tout le champ des bêtes en forme de triminos droits.

Ainsi, on peut protéger tout le champ à l'aide de 8 pièges seulement. Le nombre *minimal* de pièges pour protéger le champ est donc 8.

Étape 3 : les triminos coudés

Ici des essais successifs permettent de placer sur le plateau 8 bêtes simultanément, mais nous n'arrivons pas à exhiber une configuration de pièges qui protège le champ avec moins de 10 pièges (voir figure 8 pour un exemple de placement des bêtes et de configuration des pièges). Cette méthode ne permet pas de conclure ! C'est quelque chose qui arrive souvent en recherche : on fait des essais qui nous donnent des informations partielles mais ne nous permettent pas de conclure, il faut alors avoir de nouvelles idées !

Réactions des élèves. Si on distribue aux élèves différents types de bêtes en même temps, ils sont tentés de les utiliser tous à la fois. Il est donc préférable de ne distribuer qu'une seule sorte de bête à la fois. Les élèves sont aussi tentés de regarder les plateaux de jeu de leurs voisins, ainsi on

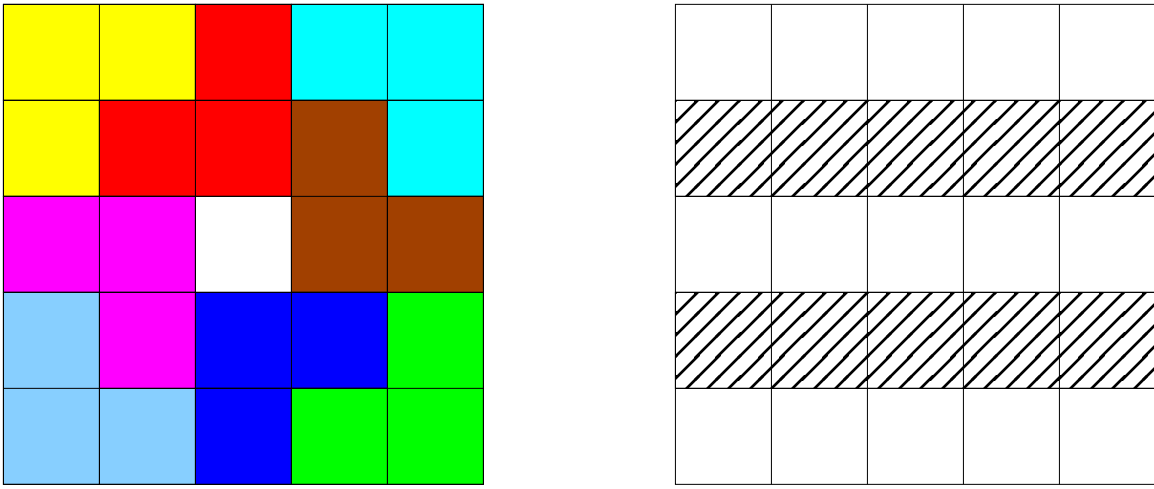


Figure 8: un exemple de placement de 8 bêtes en forme de triminos coudés dans le champ, et une configuration de 10 pièges qui protègent tout le champ des bêtes en forme de triminos coudés.

peut mettre les élèves en binômes, faire manipuler des bêtes à un élève et des pièges à l'autre. Dans le cas des triminos, lorsque les élèves proposent des configurations de bêtes, ils ont du mal à défaire le travail fait pour reconstruire, par exemple pour passer de 7 à 8 bêtes. Là encore, le travail en binôme peut aider.

Variantes. L'activité peut être proposée en classe entière en regroupant les élèves par 4 par exemple autour d'un plateau pour manipuler - l'un d'entre eux se chargera entre autres de noter les configurations de pièges ou de bêtes proposées pour les présenter à la classe. On peut varier bien sûr la forme du plateau et des bêtes à volonté. En particulier, au lycée, on pourra étudier le cas des triminos placés sur un plateau $n \times n$. Le positionnement des bêtes en forme de domino sur le plateau de jeu est lié à un problème de pavage par dominos. Ce sujet est en lui-même très riche. On peut se demander à quelle condition sur le nombre de cases d'un plateau rectangulaire on peut le paver par des dominos, c'est-à-dire le recouvrir entièrement sans faire de superposition : il faut que ce nombre

soit pair. Imaginons maintenant que le plateau rectangulaire a un nombre impair de cases, et qu'on supprime une de ses cases : à quelle condition sur les coordonnées de cette case dans le plateau le reste du plateau peut-il être pavé par des dominos ? Voir les [références](#) ci-dessous pour en savoir plus.

Pour aller plus loin. Revenons sur le cas des bêtes en forme de triminos coudés. Nous avons vu que l'argument qui a marché pour les deux autres exemples de bêtes ne marche pas ici. Il nous faut donc un autre argument. Dans chaque partie du champ de taille 2×2 , il faut placer au moins deux pièges pour protéger précisément cette partie du champ de toute bête - si nous plaçons un seul piège, il reste exactement la place suffisante pour qu'une bête se pose. Nous pouvons délimiter dans le champ 4 zones de taille 2×2 disjointes, ce qui implique qu'il faut au moins 8 pièges pour protéger le champ. En fait, en plaçant astucieusement ces 4 zones de taille 2×2 dans le champ (comme par exemple sur la figure 9 à gauche), on s'aperçoit que 2 bêtes peuvent encore se poser dans la partie du champ qui n'est pas recouverte par ces 4 carrés de taille 2×2 (voir sur la figure 9 à droite). Il faut donc 2 pièges supplémentaires pour empêcher ces 2 bêtes de se poser, soit au total 10 pièges minimum pour protéger le champ. Comme on a exhibé une solution à 10 pièges qui protège le champ, le nombre minimal de pièges pour protéger le champ est bien égal à 10.

Bibliographie. La "chasse à la bête" a été conçue dans un objectif de vulgarisation des mathématiques à l'occasion de la thèse en mathématiques discrètes d'Éric Duchêne encadrée par Sylvain Gravier. Elle a été étudiée d'un point de vue didactique par l'équipe de recherche "Maths à modeler" de Grenoble en lien avec l'IREM de Grenoble. On pourra en voir une

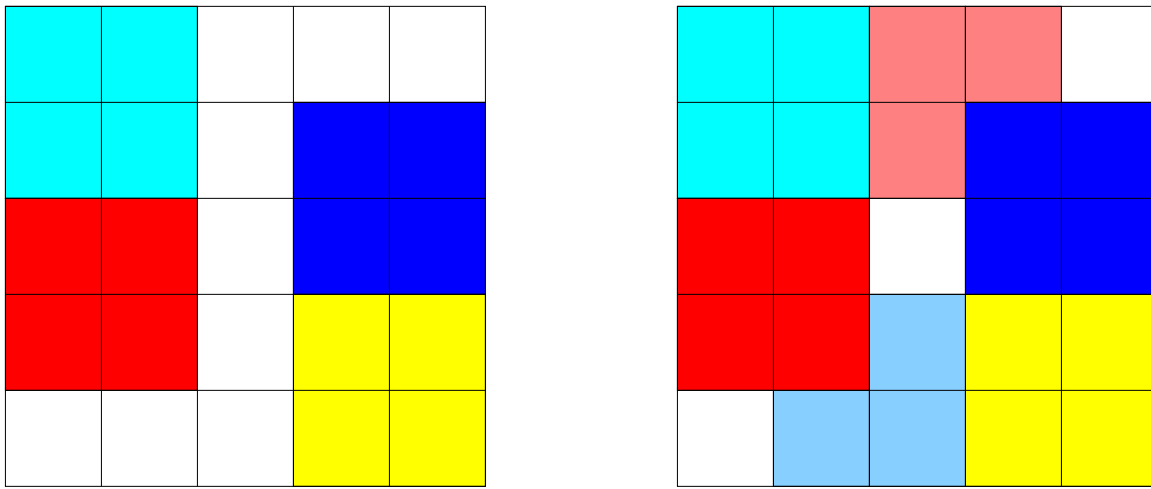


Figure 9: à gauche quatre zones de taille 2x2 disjointes sont identifiées par des couleurs différentes dans le champ ; à droite deux bêtes sont placées dans la partie du champ qui n'est pas recouverte par ces blocs de taille 2x2.

présentation, ainsi qu'une présentation de problèmes de pavages, faite par Denise Grenier à cette adresse :

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/sirc_paf_200fd7f.pdf

Elle a aussi été étudiée par Cécile Ouvrier-Bufferet, toujours dans le cadre de "Maths à modeler" :

<http://ccob.pagesperso-orange.fr/Articles/COPI2006.pdf>

C'est également le thème de l'un des stands qui a été proposé au "rallye mathématique" de la fête de la science 2009 dans les universités Paris Diderot et Pierre et Marie Curie, le sujet est ici :

https://www.math.univ-paris-diderot.fr/fds/_media/rallye_2009.pdf

et les explications sont là :

https://www.math.univ-paris-diderot.fr/fds/_media/rallye_09_solution.pdf

Annexes. Le plateau de jeu, des bêtes de différentes formes et des pièges,

à imprimer sur des feuilles de couleur cartonnées et à découper.

Ensemble des fiches disponibles sur :

<https://www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/fiches>

Pour toute question, remarque ou retour d'expérience, contacter :

diffusion@math.univ-paris-diderot.fr