Description de l'activité
Le phare

Niveaux concernés : classes de Troisième et de Seconde (voire de Terminale S pour la réciproque).

Effectif : classe entière.

Durée de l'atelier : une heure, voire plus pour reprendre certains points ou aborder la réciproque du théorème.

Matériel à prévoir : un réseau de piquets imprimé à distribuer aux élèves (qui auront règle, crayon, gomme) et un à projeter (ou dessiner ou aimanter) au tableau pour pouvoir travailler avec.
Objectifs. Travailler (voire introduire à cette occasion) les notions d'équations de droites passant par l'origine en lien avec la proportionnalité, et de nombres premiers entre eux, travailler le raisonnement logique. Pour plus de détails, voir Outils.

Explication de l'activité. Un phare (ou un projecteur, ...) représenté par un point de couleur éclaire des piquets sur une mer infinie. Les piquets sont répartis en un réseau régulier comme sur la figure 1 (voir le réseau de piquets en annexe.) Un piquet est éclairé s'il est possible qu'un

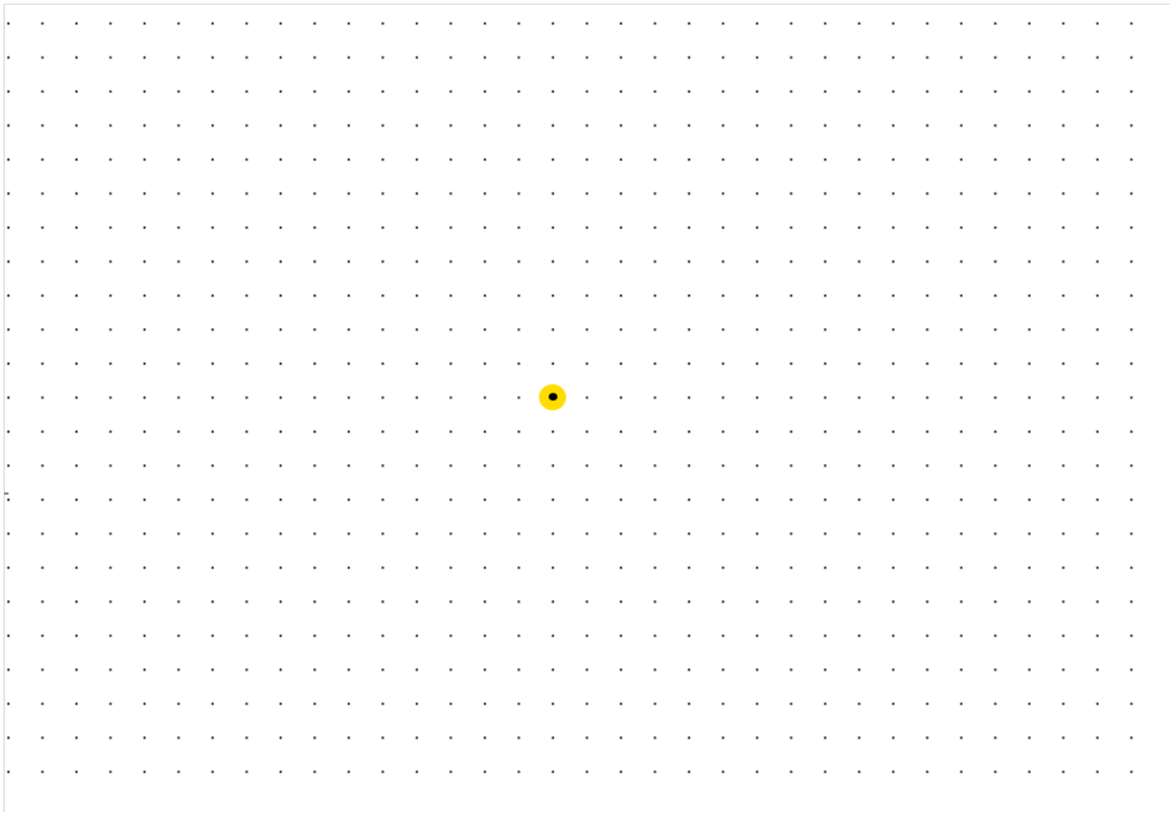


Figure 1: le réseau de piquets.

rayon lumineux joigne le phare et le piquet sans qu'aucun autre piquet ne s'interpose entre eux ; il est dans l'ombre si, sur la droite qui relie le phare au piquet, se trouve un autre piquet qui le cache du phare. Bien préciser que cette situation, peu réaliste, est simplement un prétexte à faire des mathématiques. Problème : si on se donne un piquet, comme savoir s'il est éclairé ou dans l'ombre ? et si le piquet se trouve loin, en dehors de la feuille ?

Déroulement de l'activité avec les élèves. Il faut d'abord s'assurer que les élèves ont bien compris le problème. On les laisse chercher. Avec une règle et un crayon, ils vont mettre en évidence des piquets éclairés (on entoure les points éclairés) et des piquets dans l'ombre (on les barre à l'aide d'une croix). Assez vite, les élèves s'aperçoivent qu'il y a des symétries dans leurs dessins : symétrie centrale par rapport au phare, symétries axiales par rapport aux deux axes principaux (mais aussi par rapport aux "diagonales"). Certains suggèrent alors que l'on peut se contenter d'étudier le quart de plan supérieur (on pourrait d'ailleurs se contenter de regarder un huitième de plan !). On passe alors au tableau où on projette le réseau de piquets (à défaut, on aimante le quadrillage ou on le reproduit au tableau), et on entoure le point en bas à gauche symbolisant le phare. Montrer quelques points et demander s'ils sont éclairés ou dans l'ombre. Demander aux élèves de désigner eux-mêmes des points en précisant s'ils sont éclairés ou dans l'ombre. Cela va les amener à voir la nécessité d'introduire un repère dont l'origine est le phare. On étudie ensuite rapidement le cas des piquets (distincts du phare) sur les axes : seuls les points $(1;0)$ et $(0;1)$ sont éclairés ; tous les points de la forme $(n;0)$ ou de la forme $(0;n)$, avec $n \geq 2$, sont dans l'ombre.

On en arrive donc à étudier le cas des points de coordonnées entières strictement positives. On pourra alors faire deux colonnes au tableau : dans l'une, on indiquera les coordonnées de points éclairés, dans l'autre, on indiquera les coordonnées de points dans l'ombre en précisant par quel(s) point(s) ils sont cachés. Si les élèves citent un point $(a;b)$, leur faire examiner les cas de points du type $(ca;cb)$. On en déduit par exemple le tableau :

$\times 2$

x	**2**	4	6	8	$\cdots$
y	**3**	6	9	12	$\cdots$

$\times 3$

Les élèves voient assez vite qu'il s'agit d'un tableau de proportionnalité :

x	**2**	4	6	8	$\cdots$
y	**3**	6	9	12	$\cdots$

$\times 3$

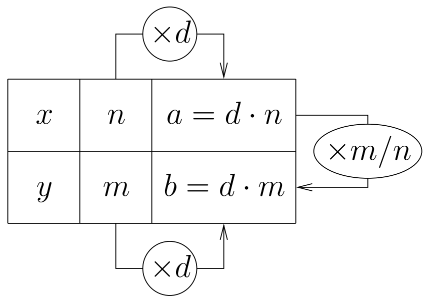
Tous les points se trouvent sur une même droite passant par l'origine (ce peut être l'occasion d'introduire le passage des tableaux de proportionnalité à la notion de droite passant par l'origine). On constate que les abscisses x et les ordonnées y de tous ces points satisfont à l'égalité $y = 3x$ (d'où la notion d'équation de droite).

Mais comment savoir si un point, par exemple $(176; 253)$, est dans l'ombre ou éclairé ? Les élèves cherchent alors un autre point qui serait dans le même tableau de proportionnalité que le point donné, mais avec de plus petites coordonnées. Ici, $176 = 2^4.11$ et $253 = 11.23$ (c'est l'occasion de revoir les critères de divisibilité), de sorte que le point $(2^4; 23)$ sera aligné avec le phare et $(176; 253)$, point qui sera donc caché. La notion de diviseur commun s'impose alors (ce peut être l'occasion d'introduire la notion d'entiers premiers entre eux), et les élèves se mettent naturellement à émettre des *conjectures*.
Soit $(a; b)$ un point de coordonnées entières strictement positives.
- Si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le point $(a; b)$ est dans l'ombre.
- Si $(a; b)$ est dans l'ombre, alors a et b ne sont pas premiers entre eux, ou encore : si a et b sont premiers entre eux, le point $(a; b)$ est éclairé.
Il reste à passer du statut de *conjecture* à celui de *proposition.*

Montrons que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le point $(a; b)$

est dans l'ombre.

Quelle est l'hypothèse ? Les entiers naturels non nuls a et b ne sont pas premiers entre eux. Ce qui veut dire qu'il existe un entier $d \geq 2$ et des entiers positifs non nuls n et m tels que $a = d.n$ et $b = d.m$. Mais alors, les points $(n; m)$ et $(a; b)$ sont dans le même tableau de proportionnalité :



Les deux points $(n; m)$ et $(a; b)$ se trouvent donc sur une droite passant par l'origine. Comme $d \geq 2$, on a $n < a$ (et $m < b$) de sorte que le point $(n; m)$ se trouve entre l'origine et le point $(a; b)$ (voir figure 2).

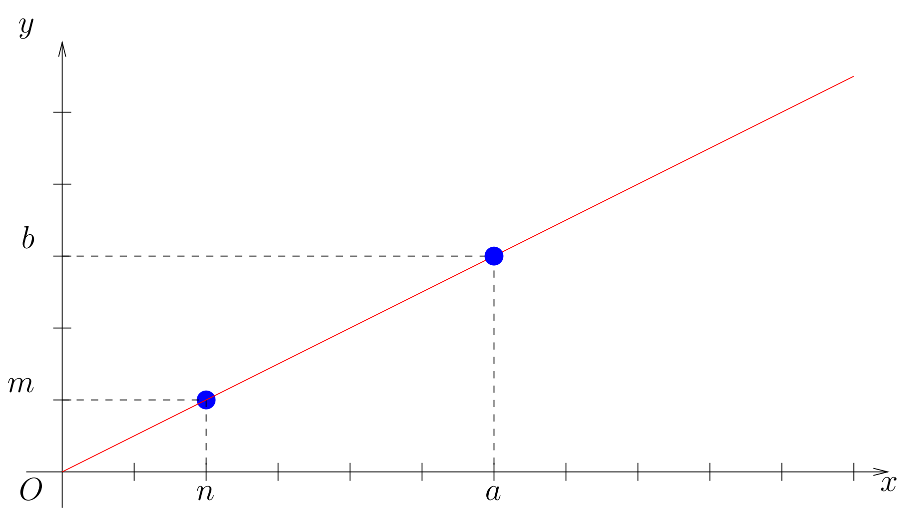


Figure 2: l'origine-phare et les points $(a; b)$ et $(n; m)$ sont alignés.

Conclusion : le point $(a; b)$ est dans l'ombre, caché par le point $(n; m)$.

En général, la séance s'achève à ce stade si on veut faire tenir l'activité en une heure. On admettra donc l'autre partie de la conjecture.

Pour aller plus loin. La réciproque nécessite en fait un outil nouveau, le lemme de Gauss. Celui-ci peut néanmoins être donné et appliqué par les élèves, même s'il n'est pas au programme. Cependant, si on souhaite faire réfléchir les élèves sur ce point afin qu'ils voient la nécessité d'avoir un autre outil, on peut procéder de la façon suivante.

Montrons maintenant que si a et b sont premiers entre eux, alors le piquet $(a;b)$ est éclairé.

Laisser chercher un peu les élèves, puis leur indiquer que l'on va faire un raisonnement par l'absurde. Si le piquet $(a;b)$ était dans l'ombre, il existerait un piquet $(n;m)$ sur le segment qui joint l'origine-phare et le piquet $(a;b)$ comme sur la figure 2. On serait alors dans une situation de proportionnalité

x	n	a
y	m	b

Il existerait donc un nombre $d > 1$ tel que $a = n.d$ et $b = m.d$.

$$\begin{tikzcd} x & n \arrow[r, bend left, "\times d"] & a \\ y & m \arrow[r, bend right, "\times d"'] & b \end{tikzcd}$$

Mais malheureusement, rien ne nous dit que d est un entier. On ne peut ainsi conclure. Il nous faut un autre outil.

On dit qu'un entier α divise un entier γ s'il existe un <u>entier</u> k tel que $\gamma = k\,\alpha$. Par exemple, 2 divise 6 car $6 = 3.2$ mais 2 ne divise pas 5 car $\frac{5}{2}$ n'est pas un entier.

Nous allons voir comment utiliser le lemme suivant.
Lemme de Gauss. Soient α, β, γ des entiers. Si α divise le produit $\beta\,\gamma$ et si α est premier avec β, alors α divise γ.

On commencera par regarder sur quelques exemples numériques ce que cela signifie. Prenons $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $\gamma = 6$. On a : α divise le produit $\beta\,\gamma$ puisque $18 = 9.2$, et 2 est premier avec 3, donc $\alpha = 2$ divise $\gamma = 6$, ce qui est bien le cas puisque $6 = 3.2$. Prenons un exemple montrant que la conclusion tombe si α et β ne sont pas premiers entre eux. Avec $\alpha = 6$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$: α divise le produit $\beta\,\gamma$, mais α ne divise ni β ni γ.

Reprenons la démonstration du fait que si a et b sont premiers entre eux, alors le point $(a;b)$ est éclairé. Revenons à la situation de proportionnalité obtenue :

x	n	a
y	m	b

Les points $(a;b)$ et $(n;m)$ satisfont alors à l'égalité $am = bn$.
L'entier a divise le produit bn. Or a est premier avec b. Donc, d'après le lemme de Gauss, a divise l'entier n, ce qui signifie qu'il existe un <u>entier</u> k tel que $n = k.a$. On a donc $am = bka$. Comme a est non nul, on en déduit $m = b.k$. Et on a en fait $k \neq 1$ d'où $k > 1$, car les deux points

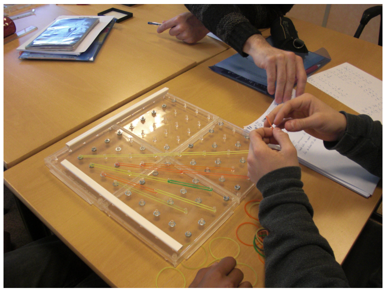
$(a;b)$ et $(n;m)$ sont distincts. Mais alors, $a = n.d$ et $b = m.d$ avec $d = \frac{1}{k}$ et $d < 1$. Le nombre d ne peut pas vérifier à la fois $d < 1$ et $d > 1$ (car les points sont alignés dans l'ordre de la figure 2). C'est absurde !

Conclusion : le point $(a;b)$ ne peut pas être dans l'ombre, il est éclairé.

Outils utilisés

- repérage dans le plan,
- utilisation de symétries pour réduire le problème,
- proportionnalité, équations de droites passant par l'origine (qui peuvent être introduites à cette occasion),
- diviseurs, critères de divisibilité, diviseurs communs,
- nombres premiers entre eux (notion qui peut être introduite à cette occasion),
- notion de conjecture, puis de démonstration,
- raisonnement par l'absurde.

Variante. En petits groupes d'une classe calme, on peut utiliser des plaques de plexiglass avec des élastiques et des écrous comme sur la photo ci-dessous pour mieux visualiser les piquets dans l'ombre et ceux éclairés :



Références. Philibert Clapponi, Activité... points vus, points cachés, petit x n°49, p. 43–44, 1998-1999.

Annexes.

Le phare et le réseau de piquets à distribuer aux élèves.

Le quadrillage à projeter au tableau.

Ensemble des fiches disponibles sur :

https://www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/fiches

Pour toute question, remarque ou retour d'expérience, contacter :

diffusion@math.univ-paris-diderot.fr