Description de l'activité

Tour de magie à 5 cartes

(ou Transmission de pensée)

Niveaux concernés : collège - lycée

Effectif : une classe pour 2 encadrants.

Durée de l'atelier : 1h (1h30 pour la variante).

Matériel à prévoir :

- un jeu de cartes (52 cartes, sans joker), si possible grand format (voir le jeu à imprimer en ligne), et des aimants ;
- plusieurs jeux de 52 cartes (petit format) pour la variante.

Objectif. Le but de cette activité est d'amener les enfants à comprendre le *truc* du tour de magie. Ce faisant, nous allons

- aborder la notion de codage de l'information ;
- amener les élèves à différencier cas particulier et méthode générale ;
- aborder les notions de conjecture et de contre-exemple, ainsi que des problèmes de dénombrement.

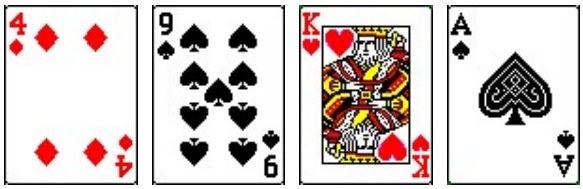
Explication de l'activité. Le tour de magie est mené par un magicien et son assistant. Le magicien sort de la pièce pendant que son assistant fait tirer 5 cartes du jeu au public. L'assistant récupère les cartes et les montre à l'assemblée. Il montre ensuite la carte qu'il souhaite faire deviner au magicien, avant de la cacher. Il dispose ensuite les 4 autres cartes à la vue de tous. On fait rentrer le magicien dans la pièce, le magicien regarde les 4 cartes et devine par magie la carte cachée.

Évidemment, il y a un truc : l'assistant choisit une carte bien précise parmi celles tirées par le public, et range les autres au tableau dans un ordre bien choisi, ce qui permet au magicien de deviner la carte cachée.

Mettons-nous un instant dans la peau du magicien pour comprendre comment il devine. Quand il rentre dans la salle, il voit quatre cartes alignées devant lui. La première carte, la plus à gauche, indique le symbole de la carte à deviner (♣, ♢, ♡ ou ♠), ainsi qu'une valeur de départ. L'ordre (petite-moyenne-grande, moyenne-grande-petite,...) dans lequel sont rangées les trois autres cartes indique la distance de la carte à deviner par rapport à la carte de départ. En ajoutant cette distance à la valeur de départ, on obtient la carte à deviner. L'ordre des cartes est pris en regardant d'abord la valeur ($1 < 2 < 3... < 10 < J < Q < K$) puis le symbole en cas d'égalité (♣ < ♢ < ♡ < ♠). En notant P pour Petite, M pour moyenne, G pour Grande, on fait correspondre une distance à l'ordre de rangement des trois dernières cartes comme suit :

Ordre	Distance
P-M-G	+1
P-G-M	+2
M-P-G	+3
M-G-P	+4
G-P-M	+5
G-M-P	+6

Par exemple, si les cartes au tableau sont les suivantes :

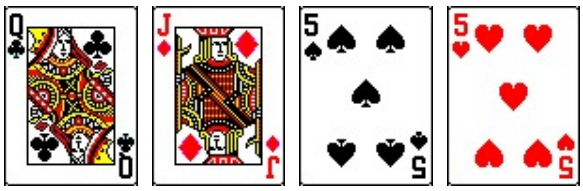


— on prend pour valeur de départ le $4\diamondsuit$,

— les trois cartes $9\spadesuit - K\heartsuit - 1\spadesuit$ sont dans l'ordre M-G-P, ce qui correspond à $+4$,

— la carte cachée est donc le $8\diamondsuit$.

Si au tableau l'assistant dispose :



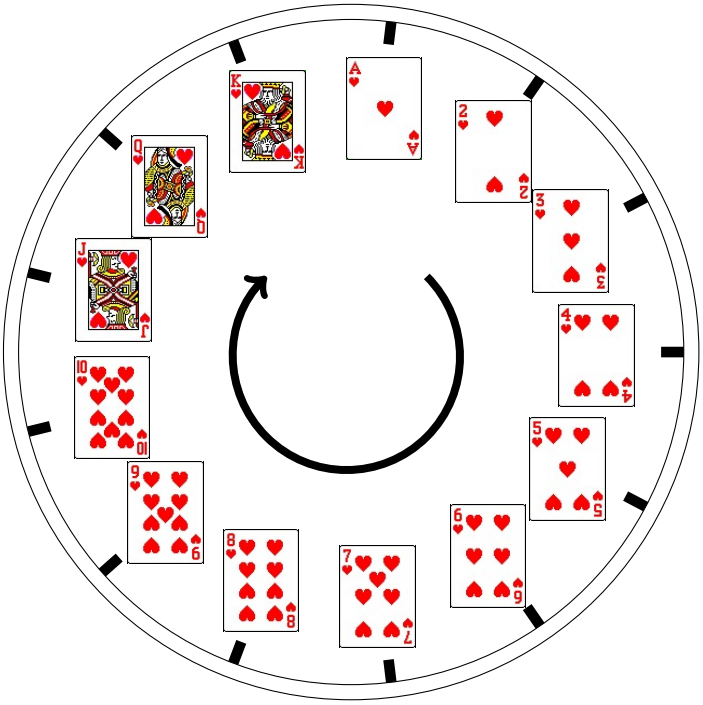
— on prend pour valeur de départ la $Q\clubsuit$,

— les trois cartes $J\diamondsuit - 5\spadesuit - 5\heartsuit$ sont dans l'ordre G-M-P, ce qui correspond à $+6$,

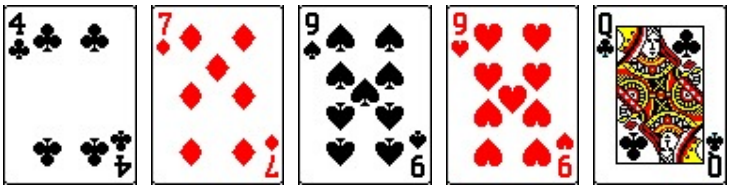
— la carte cachée est donc le $5\clubsuit$.

On remarque ici que pour ajouter 6 à la dame, on a compté comme ceci : $Q+1=K$, $Q+2=1$, $Q+3=2$, $Q+4=3$, $Q+5=4$ (ceci est illustré sur la prochaine figure).

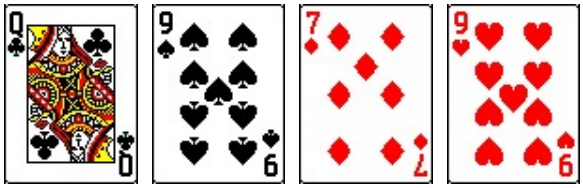
Plaçons-nous maintenant du côté de l'assistant, pour comprendre comment il fait pour toujours respecter ce code. Le public tire 5 cartes au hasard, mais comme un jeu ne comporte que 4 symboles différents, nécessairement il y a au moins 2 cartes du même symbole, supposons que ce soit du cœur. De plus, si l'on considère les cartes d'un même symbole comme étant ordonnées par leur valeur sur une sorte d'horloge (voir figure ci-dessous), on constate que si l'on choisit deux cartes, on peut toujours aller de l'une à l'autre en au plus 6. Par exemple, il faut 8 pour aller du 3 au Valet (Jack), mais il faut seulement 5 pour aller du Valet au 3. Ceci est vrai car il y a exactement 13 cartes de chaque symbole.



De fait, l'assistant va pouvoir choisir parmi les cœurs une carte cachée et une carte de départ de telle sorte que la distance qui les sépare soit comprise entre 1 et 6. Il pourra alors indiquer la distance à l'aide des trois autres cartes. Par exemple, si le public tire les cartes suivantes :

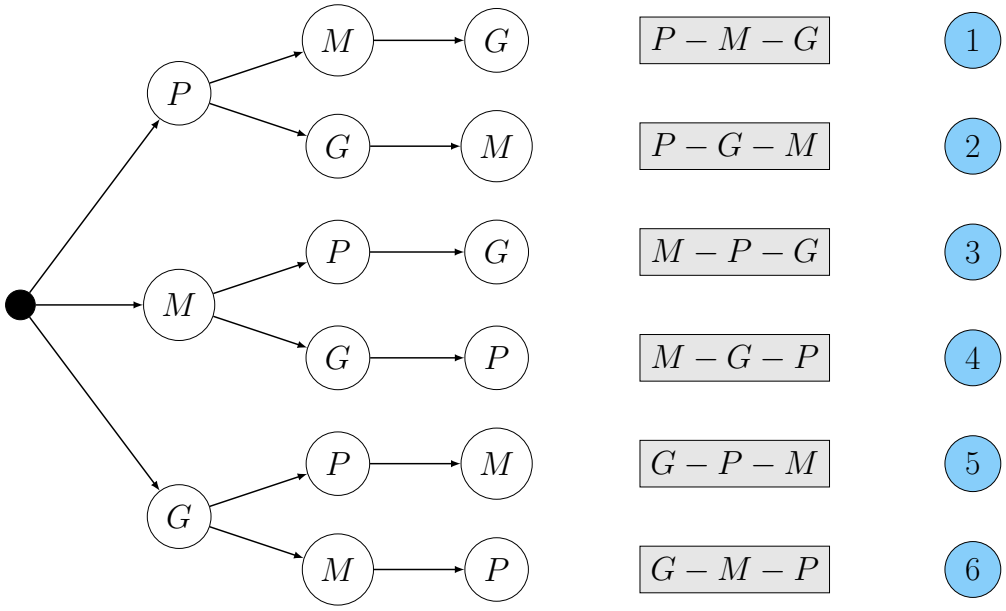


l'assistant fera deviner le 4♣ depuis la Q♣ (distance de 5), en rangeant les autres cartes dans l'ordre G-P-M. Il placera donc au tableau :



Mise en œuvre. On commence par effectuer le tour de magie devant les élèves plusieurs fois, en prenant soin de noter au tableau les cartes affichées et la carte qui était à deviner pour en garder une trace. Rapidement, les élèves comprennent que le magicien se sert des cartes affichées pour trouver la dernière, probablement en faisant une sorte de "calcul". À chaque proposition d'un élève, on peut se servir de la liste des tours déjà faits pour vérifier ou non la proposition. Normalement, les élèves font assez vite le lien entre le symbole de la carte la plus à gauche et celui de la carte à deviner. On peut le mettre en évidence sur la liste, en expliquant que ce que l'on fait là se nomme une *conjecture*, et qu'on se sert de l'expérience pour la valider. On demande alors aux élèves si l'assistant pourra toujours choisir deux cartes du même symbole, pour les amener à voir que cela marche à tous les coups. Ensuite, on essaie de leur faire comprendre que ce qui est important, c'est *l'ordre* dans lequel l'assistant range les autres cartes. On peut leur demander comment on peut ranger les cartes, en essayant de faire apparaître dans la conversation la notion de carte plus petite, plus grande, etc. Question à poser : *est-il toujours possible de comparer deux cartes ?* On leur fait comprendre que le choix de l'ordre sur les symboles

est une convention entre l'assistant et le magicien, en leur donnant celui choisi : $\clubsuit < \diamondsuit < \heartsuit < \spadesuit$ (c'est l'ordre utilisé au bridge). On leur demande ensuite de faire la liste des combinaisons possibles (P-M-G, G-M-P,...), en prenant soin de les noter au tableau dans l'ordre naturel. Quand ils n'en trouvent plus, on leur demande s'ils sont sûrs qu'il n'y en a pas d'autre, et comment ? Suivant le niveau, on peut alors faire l'arbre des possibilités



ou faire une petit calcul de dénombrement : j'ai 3 choix pour la première carte, ensuite je n'en ai plus que 2 pour la deuxième, et 1 pour la dernière, soit au total $3 \times 2 \times 1 = 6$ possibilités de rangement.

On numérote (pour aider) les combinaisons, et on revient à la liste des tours de magie effectués, en demandant à chaque fois aux élèves d'identifier la petite, la moyenne puis la grande carte, puis le numéro de combinaison correspondant. Normalement, ils devraient alors comprendre qu'on ajoute le numéro à la valeur de la carte. Question : combien de combinaisons avions-nous ? Peut-on toujours aller d'une carte à une autre en moins de 6 ? On leur explique alors au besoin le principe de l'horloge. On peut alors refaire le tour en choisissant magicien·ne·s et assistant·e·s parmi les

élèves.

Réactions des élèves.

• Au début du tour, les élèves émettent spontanément de nombreuses conjectures. À chaque fois, il faut bien les amener à se demander si leur conjecture fonctionne sur *tous* les exemples au tableau, et si elle est raisonnable : cela définit-il une méthode que le magicien et l'assistant peuvent appliquer (par opposition aux raisonnements changeant à chaque coup), l'assistant peut-il espérer piocher à chaque fois des cartes permettant de faire cela ? Ne pas hésiter à leur donner des contre-exemples supplémentaires si les configurations écrites au tableau ne suffisent pas.

• Certains pourront émettre des doutes quant au fait que le magicien ait pu voir/entendre, ou que l'assistant ait pu faire des signes au magicien quand il rentre. Il ne faut pas hésiter à jouer le jeu, en envoyant un élève surveiller le magicien dans le couloir, en cachant l'assistant dans la pièce quand le magicien rentre pour qu'il ne puisse pas communiquer, etc.

• Quand les élèves posent des questions pertinentes ou pouvant amener à comprendre une partie du tour, bien insister dessus :

est-ce qu'on peut choisir la carte cachée à la place de l'assistant ?

est-ce qu'on peut mélanger les cartes au tableau ?

–> Non, mais réfléchis bien à cela, cela t'apporte des informations !

• De façon générale, dès que les élèves comprennent un élément du code, bien les amener à se demander si cela est toujours possible pour l'assistant.

• On peut expliquer aux élèves que l'ordre des combinaisons est "naturel" : c'est celui du dictionnaire ! Si l'on remplace P par a, M par b et G par c, l'ordre devient : abc/acb/bac/bca/cab/cba. Il n'y a donc pas à se souvenir par cœur d'une correspondance mystérieuse !

• Remarquer que l'on a choisi de parler du *symbole* et de la *valeur* d'une carte et non de sa *couleur* et de sa *hauteur*, vocabulaire traditionnellement utilisé pour un jeu de cartes mais pas forcément connu des élèves et trompeur : dans un jeu de cartes, il y a quatre couleurs (trèfle , carreau, cœur, pique), alors qu'on a envie de dire qu'il n'y en a que deux, le rouge et le noir !

Variante. *Bien adapté pour une séance de MPS en classe de Seconde.* On peut faire ce tour par petits groupes. D'abord le magicien et son assistant font le tour de magie plusieurs fois en laissant au tableau les choix de cartes. On demande aux élèves s'ils ont une idée de la manière dont le tour est réalisé (recherche individuelle pendant quelques minutes). Puis on groupe les élèves par petits groupes de deux à quatre (inutile de bouger les tables, répartir les rôles, en n'oubliant pas le médiateur chargé de faire retomber le volume sonore), et on donne un jeu de cartes à chaque groupe. Plutôt que de leur demander de comprendre le fonctionnement du tour de magie dans son ensemble, on leur décompose le travail en différentes étapes, présentées ci-dessous. Au cours de chaque étape, les encadrants doivent passer de groupe en groupe pour donner des indices ou des contre-exemples. À la fin de chaque étape, un encadrant explique la solution de l'étape, ce qui permet à tous les groupes d'aborder l'étape suivante. Voici les différentes étapes qu'on demande aux élèves de faire.

1. Chaque groupe ne conserve que 9 cartes, de 3 symboles différents, avec exactement 3 cartes par symbole, par exemple les cartes 1, 2, 3 à ♣, ♢ et ♡. Les élèves doivent réaliser un tour de magie simplifié en tirant 4 cartes et en en faisant deviner une avec les 3 autres. Une solution est d'utiliser la première carte pour indiquer le symbole à

trouver et les deux cartes restantes pour coder la valeur. Le code ici est beaucoup plus simple. Si la première carte posée est le 2♡ par exemple, la carte à deviner est le 1♡ ou le 3♡. Il suffit alors de choisir une convention sur l'ordre dans lequel on pose les deux cartes qu'il nous reste en main : par exemple l'ordre Grand puis Petit codera la plus grande des deux cartes (le 3♡), l'ordre Petit puis Grand codera la plus petite des deux cartes (le 1♡).

2. Chaque groupe conserve à présent 7 cartes pour chacun des 4 symboles, soit 28 cartes en tout, par exemple les cartes de 1 à 7 de chaque symbole. Les élèves doivent maintenant réaliser le tour de magie présenté par le magicien et son assistant, c'est-à-dire tirer 5 cartes et en faire deviner une à l'aide des 4 autres. La solution suggérée est d'utiliser la première carte pour indiquer le symbole et les trois cartes restantes pour coder la valeur. Dans cette partie, il faut expliquer comment utiliser 3 cartes pour coder 6 valeurs différrantes. On voit donc apparaître le code du vrai tour de magie dans son ensemble. Par contre, le problème est plus simple, car il n'y a que 7 cartes par symbole. Ainsi, si la première carte posée est le 3♣, la carte à deviner est une des 6 cartes suivantes : 1♣, 2♣, 4♣, 5♣, 6♣ et 7♣. Les 6 configurations possibles des 3 cartes restantes à poser (PMG, PGM, etc.) peuvent donc coder ces 6 cartes, classées par exemple dans l'ordre croissant. Le problème est donc plus simple qu'avec un jeu de 52 cartes : on peut indifféremment faire deviner le 6♣ à l'aide du 3♣, ou le 3♣ à l'aide du 6♣.

3. Chaque groupe prend maintenant le jeu de 52 cartes dans son ensemble (toujours penser à enlever les jokers). Pour comprendre le

tour de magie général, il faut donc ajouter l'étape du choix de la carte à faire deviner parmi les (au moins) 2 cartes de même symbole, et penser à l'écriture "cyclique" des cartes (voir la figure de l'horloge présentée plus haut).

Réactions des élèves (variante). À l'étape 1, presque tous les élèves trouvent tout de suite que parmi quatre cartes, il y a au moins deux cartes de même symbole. Mais la majorité va donner des réponses exemple par exemple. Il faut leur expliquer qu'on fera le tour avec le jeu complet et donc qu'il faut trouver une solution universelle. À l'étape 2, en général, les élèves sont d'abord un peu perdus. Les faire réfléchir sur le nombre de permutations entre trois cartes. Quelques élèves insistent sur leurs idées fausses d'un bout à l'autre. Ne pas hésiter à leur donner des contre-exemples et à les diriger vers la bonne direction assez tôt.

Annexes : un jeu de grandes cartes à imprimer.

Ensemble des fiches disponibles sur :
https://www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/fiches
Pour toute question, remarque ou retour d'expérience, contacter :
diffusion@math.univ-paris-diderot.fr