Description de l'activité
Zombies

Niveaux concernés : collège.

Effectif : classe entière (travail possible en groupes).

Durée de l'atelier : 30 à 40 minutes.

Matériel à prévoir : une feuille sur laquelle sont disposés des quadrillages carrés 2×2, 3×3, 4×4 et 9×9. Un exemple est proposé en Annexe.

Objectif. Même s'il est possible de travailler quelques idées de dénombrements et, de façon marginale, les notions d'aires et de périmètres (voire même de souligner que le périmètre d'une surface peut diminuer alors que l'aire augmente), l'essentiel repose ici dans le travail sur les raisonnements. Il y a deux conditions à vérifier (que la configuration proposée permet le coloriage du carré, que la configuration proposée est minimale) et deux raisonnements à produire : montrer un exemple suffit à prouver qu'il existe une solution de taille donnée (un exemple suffit), mais il faut ensuite se poser la question de l'existence de solutions plus petites (chercher une solution plus petite n'est pas le même travail que chercher à prouver qu'il n'y en a pas).

Explication de l'activité. L'habillage peut bien sûr être modifié : on peut parler de zombies qui envahissent la ville, ou de quartiers qu'il faut libérer, mais aussi de virus contaminant des cellules, ou au contraire de cellules qui guérissent... Nous parlerons ici de cases blanches et de cases colorées : il s'agit d'étudier la propagation des cases colorées dans un quadrillage blanc. La règle de propagation est la suivante : une case blanche étant "bordée" (un côté en commun) par au moins deux cases colorées devient colorée. Si plusieurs cases peuvent être colorées, on les colore les unes après les autres. On admet que l'ordre dans lequel on colore ces cases n'a pas d'importance.

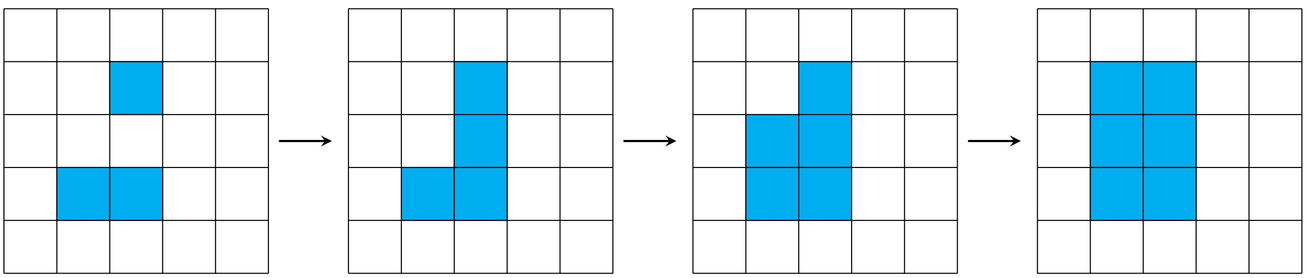

Figure 1

Question : quel est le nombre minimal de cases colorées qu'il faut disposer sur un quadrillage pour qu'il soit, après un certain nombre d'étapes, entièrement coloré ? Comment les disposer ?

On se limite ici aux quadrillages carrés.

Premier résultat. Il faut au moins deux cases colorées initialement pour colorer entièrement un quadrillage 2×2.

Preuve. Une case ne suffit pas (pas de propagation). Il existe une disposition de deux cases colorées qui permet de colorer tout le carré (disposer les deux cases sur deux coins opposés). Comme il existe une solution à deux cases et qu'il n'existe pas de solution à une case, on a bien un minimum.

De façon générale, pour un carré $n \times n$, il y a toujours une solution à n cases colorées : on dispose n cases colorées sur la diagonale. Il y a d'autres solutions à n cases colorées bien sûr, mais une nous suffit. Existe-t-il des solutions avec moins de cases colorées au départ ?

La réponse est négative. Pour le prouver on fait un détour : on étudie une propriété de la succession des zones colorées.

On étudie le périmètre de la zone colorée : sur l'exemple de la figure 1, le périmètre est toujours égal à 10 (pour la première étape on additionne le périmètre d'un carré, de longueur 4, et celui d'un rectangle, de longueur 6 ; ensuite on mesure la longueur du contour). Dans l'exemple de la figure 2 ci-dessous, le périmètre diminue. Il est initialement à 12, il mesure ensuite 10.

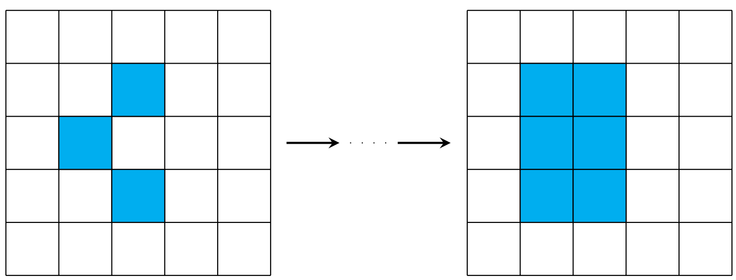

Figure 2

On peut en fait montrer que, compte tenu du processus de propagation, le périmètre ne peut que diminuer.

Pour s'en convaincre, on peut distinguer les différentes situations dans lesquelles une case devient colorée. Pour devenir colorée, une cellule doit être bordée par deux cellules colorées (cas a et a'), ou trois (cas b) ou quatre (cas c) :

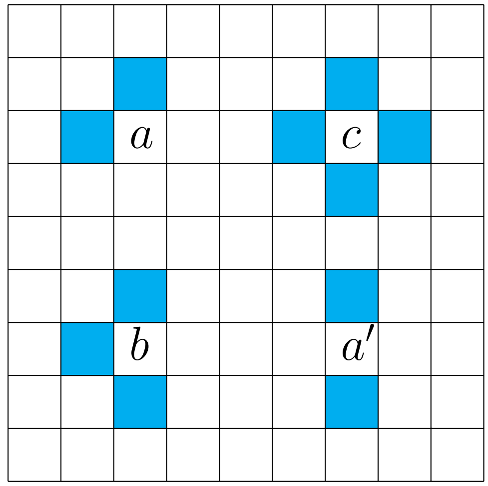

Figure 3

Dans les quatre cas de propagation, le périmètre diminue (diminue de deux unités dans le cas b, et de quatre unités dans le cas c) ou est constant (cas a et a') .

Imaginons alors $n-1$ cases sur un quadrillage, le périmètre de la zone colorée par ces cases est au maximum de $4 \times (n-1)$ (situation où aucune de ces cases ne se touche). Après propagation(s) le périmètre ne peut que diminuer (ou rester constant). Or le périmètre d'un carré de côté n est $4n$, qui est plus grand que $4 \times (n-1)$. La propagation à partir de $n-1$ cases colorées ne peut donc aboutir au coloriage d'un carré $n \times n$.

On a donc une solution à n cases colorées, et la preuve qu'il n'y a pas de solution à $n-1$. On a une preuve que notre solution est minimale.

Déroulement de l'activité avec les élèves.

Une fois présenté l'habillage (les zombies envahissent la terre et sont peu nombreux, on dispose d'un médicament dont on veut optimiser le dosage etc.), le fonctionnement (représentation sous forme de quadrillage, principe de propagation) et l'enjeu (tout colorer, et le faire avec un minimum de cases colorées au départ) aux élèves, on commence par les faire réfléchir aux carrés 2×2, puis 3×3 et 4×4. Pour chacun de ces trois carrés, les réactions sont différentes.

Bien s'assurer au départ que le principe est compris, notamment la propagation sur des exemples simples.

Le carré 2×2 est en général traité rapidement. On voit aussi ici qu'il y a plusieurs solutions minimales. Il y a un petit enjeu dans la description des solutions minimales : si les élèves parlent de diagonale, il est possible que cela les guide pour la suite...

Le carré 3×3 permet encore de travailler à la main : on trouve des solution à trois cases colorées (NB : cela peut prendre du temps aux élèves, le travail à plusieurs permet souvent d'avancer plus efficacement). Contrairement à ce que l'on pourrait croire, on trouve des solutions non diagonales et des solutions ayant une ligne ou une colonne vide :

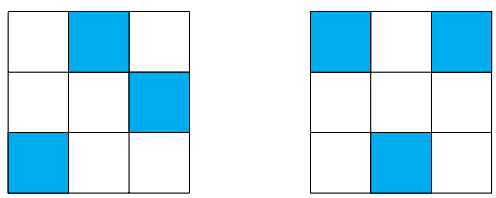

Figure 4

Il permet de bien souligner les deux demandes : trouver une solution ET prouver qu'il n'y en a pas une "meilleure" (nécessitant moins de cases colorées au départ). Pour prouver que deux cases colorées ne peuvent suffirent à colorer tout le carré, on peut encore raisonner en exhibant toutes les façons de disposer deux cases colorées dans un quadrillage 3×3. En tenant compte des symétries, on se ramène à étudier seulement quelques cas :

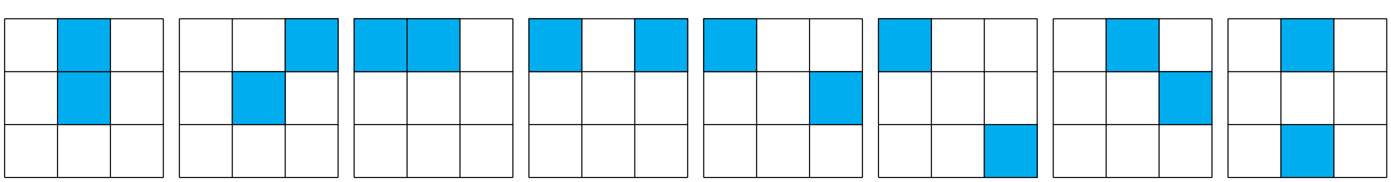

Figure 5

Le carré 4×4 est difficile. Trouver une solution en quatre cases colorées est possible (mais pas évidente, cela peut nécessiter du temps et de multiples essais). Montrer qu'il n'existe pas de solution en trois cases n'est pas simple (il n'est pas raisonnable de se lancer dans l'étude de toutes les configurations possibles par exemple, l'envie est grande de se servir de l'étude faite pour le carré 3×3 en le voyant comme une sous-figure, mais cela n'aboutit pas).

En fonction de ce qui est dit, des solutions trouvées... on peut demander si les solutions trouvées marchent toujours (pour la diagonale par exemple), on peut faire remarquer que pour le carré 2×2 on avait une solution en 2 cases colorées, pour le carré 3×3 on avait une solution en 3 cases colorées, et que maintenant, on a une solution en 4 cases. Autant de motivations pour tester la généralité ce qui est dit... et passer à des carrés plus grands.

On peut alors proposer le carré 9×9 de façon à faire sentir que le bricolage va être coûteux en temps : on peut par exemple le faire lorsqu'un élève propose une "solution" en lui demandant la façon dont il l'adapterait dans ce cas.

L'idée d'étudier le périmètre de la zone colorée n'est pas naturelle. Il faut sortir de l'étude de multiples cas particuliers. Cette idée peut être approchée en proposant de prendre un petit temps de recul pour étudier la façon dont la zone colorée évolue lors des propagations successives : elle s'agrandit, la forme devient "moins morcelée", "moins biscornue" etc. Une idée pour quantifier ce "moins biscornu" est de mesurer le périmètre (on pourrait aussi compter les "coins"). Il est possible que le travail se termine par une phase d'exposé. Mais la séance a rempli son rôle si les élèves ont compris l'objectif, à savoir, montrer qu'une solution à 8 cases colorées pour le carré 9×9 n'est pas possible) et qu'ils ont compris le principe, c'est-à-dire qu'avec 8 cases colorées, même après propagation, on n'aura jamais une surface ayant un périmètre plus grand que 32... et le carré 9×9 a un périmètre de 36.

Réactions des élèves. Les élèves proposent souvent des solutions fausses, d'où la nécessité de leur donner des contre-exemples. En particulier, le fait d'avoir un zombie par ligne et par colonne n'est pas une condition suffisante pour obtenir une configuration à n cases colorées lorsque $n \geq 4$:

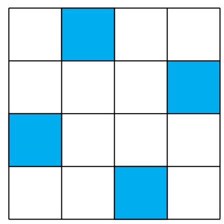

Figure 6

Dans le cas 3×3, on a vu qu'il s'agit d'une condition suffisante mais non nécessaire. L'idée de travailler par récurrence est une idée naturelle car on passe au cas 3×3 à partir du cas 2×2, mais cela ne marche pas. Enfin, il peut être pratique de numéroter les cases pour mieux se repérer dans le plan (avec par exemple un repérage de type "bataille navale").

Variantes. *à compléter, pour présenter les adaptations qu'on peut faire pour que l'atelier s'adresse à un public plus ou moins jeune, dure plus ou moins longtemps.*

Pour aller plus loin. Pour des lycéens, on pourra traiter le cas des villes de taille $n \times n$, ou des villes rectangulaires $n \times m$.
Cette situation se rapproche des automates cellulaires :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Automate_cellulaire.

En se limitant à la dimension 1 (une ligne de cases et des règles de propagation à définir), on peut tout à fait déboucher sur un travail d'algorithmique.

Bibliographie.

Annexes. Une ville 2×2, une ville 3×3, une ville 4×4, une ville 5×5, ou une ville 9×9.

Ensemble des fiches disponibles sur :
https://www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/fiches
Pour toute question, remarque ou retour d'expérience, contacter :
diffusion@math.univ-paris-diderot.fr