



Grand froid sur la banquise

Sur la banquise en hiver, les manchots empereurs veulent se tenir chaud ! Ils se regroupent en un tas très compact qu'on appelle une "tortue". Aidons-les à résoudre le problème suivant : si 20 manchots sont volontaires pour rester sur le bord de la tortue en se gelant le bout des ailes, quelle forme doit avoir cette tortue pour que le plus grand nombre possible de manchots soient protégés à l'intérieur de la tortue ?



© CNRS Photothèque/IPEV ; UPR9010 – CEPE – Strasbourg

On peut reformuler ce problème de façon mathématique. Cela revient à chercher quelle forme, à périmètre fixé, a la plus grande aire possible. Cette question est en fait très complexe. Simplifions-la ! Peut-on répondre à cette question si les seules formes qu'on s'autorise sont des polygones ?



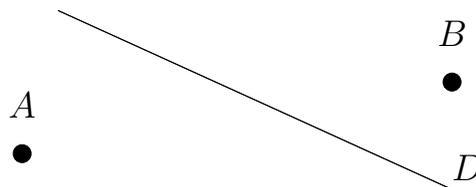
1) Chemin le plus court

Regardons d'abord un problème plus simple...

a) Quel est le plus court chemin entre les points A et B dans la figure ci-dessous ?



b) Même question si on impose que ce chemin coupe la droite D ?



c) Et dans ce cas de figure ? Comment peut-on se ramener à la question précédente ?



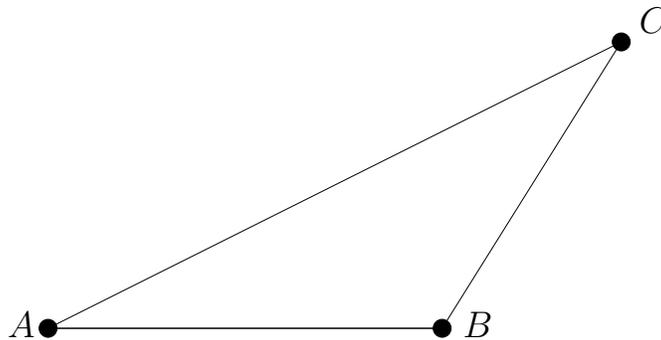


2) Triangle

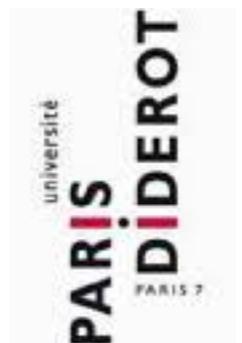


© CNRS Photothèque/IPEV – PIERRE Katell
UPS2928 – Institut Polaire – Plouzané

On se fixe la base AB d'un triangle ABC .



- Comment bouger le sommet C pour que le triangle conserve la même aire ?
- Où placer C pour que, toujours en conservant la même aire, le périmètre du triangle soit minimal ?
- Comment déplacer C à nouveau pour obtenir un triangle de même périmètre que celui dessiné sur cette page mais d'aire plus grande ?
- Si on s'autorise maintenant à déplacer A et B , quel est donc le triangle à périmètre fixé qui a la plus grande aire ?



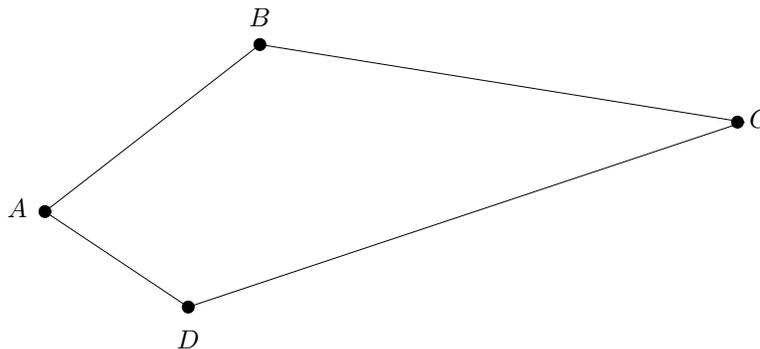


3) Quadrilatère



© CNRS Photothèque/IPEV – PIERRE Katell
UPS2928 – Institut Polaire – Plouzane

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ ("quadri" signifie 4, "latère" signifie côté) .



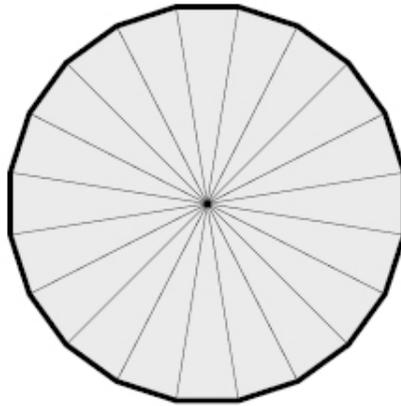
a) Comment déplacer les sommets A et C , puis B et D , pour obtenir un losange (quadrilatère dont tous les côtés sont de même longueur) de même périmètre que $ABCD$ mais d'aire plus grande ?

b) Pouvez-vous déformer ce losange à périmètre fixé pour maximiser son aire ? Quel est donc le quadrilatère à périmètre fixé qui a la plus grande aire ?





4) Pour aller plus loin



- a) A votre avis, quel est le polygone à n côtés d'aire maximale à périmètre fixé ?
- b) Pouvez-vous calculer son aire ? La comparer à celle d'un disque de même périmètre ?
- c*) Pouvez-vous prouver que votre intuition en a) est la bonne ?
- Montrez que tous les côtés du polygone doivent être égaux.
 - Montrez que deux angles non adjacents ("voisins") doivent être égaux.
 - Montrez finalement que tous les angles sont égaux.

