Actualité:

Fête de la Science du 8 au 14 octobre

Accueil Ateliers Mathématiques Activités Mathématiques à Chevaleret Liens Contact Membres

Longueur, aire, volume : des notions plus compliquées qu'il n'y paraît !

Matériel : 2 paires de ciseaux et quelques feuilles de papier.

Commençons par des questions simples.

Je dessine un segment [AB] au tableau. Comment définissez-vous sa longueur ?

Laisser un petit blanc, puis enchaîner.

Laissons cette question de côté pour l'instant. Je dessine une figure plane déterminée par une frontière...

Dessiner un cercle.

Comment définissez-vous son aire ?

Laisser un tout petit blanc.

Si on y réfléchit quelques instants, on voit que ce sont des questions très épineuses. Ce qu'on sait bien, depuis qu'on est tout petit, c'est que si une figure plane est entièrement contenue dans une autre,

Dessiner un grand cercle qui enferme le premier.

alors l'aire de la figure contenue est plus petite que l'aire de la figure contenante.

Noter F et F' les figures, et écrire : $A(F) \leq A(F')$.

Et on a le même genre de choses avec les longueurs. Nous allons laisser un peu de côté le côté épineux de nos questions, et nous allons plutôt utiliser ce que l'on sait des longueurs et des aires pour étudier une drôle de figure.

La terminologie utilisée pendant l'exposé pour distinguer entre une courbe (fermée) et le domaine plan qu'elle délimite est très importante. On veut pouvoir éviter les confusions engendrées par l'usage courant qui parle du périmètre et de l'aire d'un triangle. Par exemple, si un domaine F est contenu dans un autre G, on prendra bien soin de dire que sa frontière enferme, ou enclot (et non pas contient) celle de G.

Je commence par tracer un triangle équilatéral au tableau, je l'appelle F_0. Ensuite je partage chaque côté de F_0 en trois segments, et sur le segment du milieu, je colle un triangle équilatéral. J'obtiens une figure que j'appelle F_1. Je peux recommencer : je partage chaque côté de F_1 en trois segments, je colle un triangle équilatéral sur le segment du milieu, j'obtiens une figure que j'appelle F_2.

Dessiner F_0, F_1, F_2.

On construit ainsi des figures F_0, F_1, F_2,F_3,F_4... À la limite, on obtient une figure F qui ressemble à un flocon. Les mathématiciens l'appellent le *flocon de Koch*, du nom du mathématicien suédois qui l'a découverte. (Sur wikipedia, à la rubrique "Flocon de Koch", on peut voir l'animation des différentes figures successives).

En guise de F, dessiner un bout de F_3.

Nous noterons C la frontière de F, car c'est une *courbe* – alors que F est une *surface*. À votre avis, que peut-on dire sur l'aire de F ? Et sur la longueur de C (ce qu'on appelle le *périmètre*) ?

Les faire s'exprimer d'abord sur l'aire. On veut arriver au fait qu'elle est finie. On peut par exemple dire que comme le flocon tient dans le tableau, d'après ce qu'on a dit tout à l'heure, son aire est plus petite que celle du tableau. En particulier, cette aire n'est pas infinie.

Nous allons voir que le périmètre, lui, est infini.

Si, à un moment, survient une objection du type << le flocon tient dans le tableau, donc son périmètre est plus petit que celui du tableau >>, on fera s'exprimer les élèves. Si aucun contre-exemple ne sort, on dessinera sur le tableau un serpentin qui longe un côté du tableau, puis arrivé au bout fait demi-tour, etc. Il peut être arbitrairement long si les virages en épingle à cheveux sont tous petits. On fera observer *cette subtilité entre longueur et aire.*

En effet, pour passer de F_1 à F_2, je remplace chaque côté par 4 côtés 3 fois plus petits. Donc je multiplie la longueur par 4/3. Supposons pour faire simple que la longueur de la frontière C_1 vaut 1 mètre. Alors voici les longueurs qu'on obtient ensuite :

pour C_1 : $4/3 \approx 1{,}33333...$

pour C_2 : $4/3 \times 4/3 = 16/9 \approx 1{,}77777...$

pour C_3 : $4/3 \times 4/3 \times 4/3 = 64/27 \approx 2{,}37037... \geq 2$

pour C_{30} : $(4/3 \times 4/3 \times 4/3) \times ... \times (4/3 \times 4/3 \times 4/3)$ (10 facteurs, tous ≥ 2)

$$\geq 2 \times ... \times 2 = 2^{10} = 1024 \geq 1000 = 10^3$$

Vous avez sûrement remarqué que pour passer de C_3 à C_{30} on a élevé à la puissance 10.

La taille de l'Univers est d'environ $4{,}73 \times 10^{26}$ mètres. Ah ! Mais alors, on passe de la longueur de C_{30} à celle de C_{270} en élevant à la puissance 9, donc on a :

pour C_{270} : c'est $\geq (10^3)^9 = 10^{27}$.

C'est plus grand que la taille de l'Univers ! Et si on continue à faire des itérations, vous voyez bien, je pense, que ça va tendre vers l'infini.

*Une remarque, si la question << qu'est-ce que l'Univers ?>> est posée. Il serait plus juste de dire l'*Univers observable*. Il est délimité par le trajet qu'a parcouru la lumière depuis le Big Bang.*

Dire précisément ce que c'est que l'infini, c'est un peu comme dire ce que c'est que la longueur ou l'aire, c'est assez délicat. C'est ce que vous ferez au lycée, et ensuite à l'Université, si vous continuez à faire des études scientifiques. Pour l'instant, on va faire comme si de rien n'était, et on fait confiance à notre intuition (qui, ici, ne nous trompe pas) : la longueur de F est infinie.

On a donc construit une figure qui a une aire finie, mais un périmètre infini. Ceci veut dire que si on veut tracer sa frontière avec un stylo feutre, toute l'encre du monde n'y suffira pas ; par contre, on a assez d'encre pour peindre l'intérieur du flocon ! Ça laisse rêveur, non ?

Il se trouve que des figures aussi tarabiscotées, que l'on appelle des *fractales*, ont des applications dans la vie de tous les jours. Des chercheurs français ont eu l'idée de fabriquer un mur dont la surface est très irrégulière, comme le flocon. Les ondes sonores viennent se perdre dans les anfractuosités du mur, ce qui fait qu'il a des qualités d'isolation phonique exceptionnelles (de 30 à 50% plus efficace que les murs habituels). Ce mur antibruit est utilisé aujourd'hui pour isoler les voies d'autoroutes.

On peut parler de la côte de Bretagne, des poumons, des radiateurs.

On voit que les figures d'aire finie peuvent renfermer bien des mystères. Il y a un objet de la vie de tous les jours qui renferme de tels mystères, c'est la feuille de papier que vous utilisez pour noter vos cours.

On sort une feuille A4.

Je vous mets au défi de découper un trou dans cette feuille, de façon à passer au travers ; et même, je voudrais passer au travers de la feuille en même temps que celui qui y arrivera.

On les fait manipuler. On explique…

This document was translated from LaTeX by HEVEA.