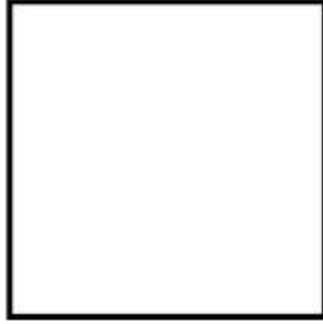


Même aire et p pair

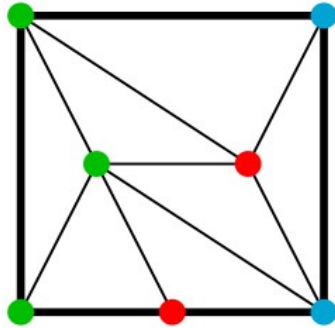
1) Sauriez-vous découper un carré en 2 triangles égaux ? En 4 ?



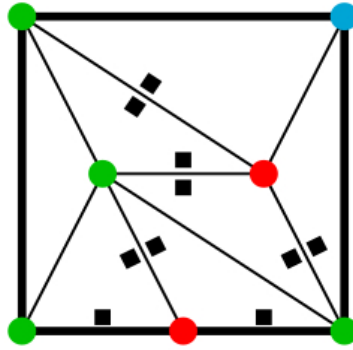
2) Et en 6 ? En un nombre pair de triangles ? Et en 5, 7 ?

En fait on ne peut pas partager équitablement un sandwich (carré !) en un nombre impair de sandwiches triangulaires. Tâchons de voir pourquoi :

3) Partons d'un partage quelconque et colorons les sommets des triangles :



Pour chaque segment on place un sur chaque côté qui se trouve à l'intérieur du carré :



En regroupant de deux manières différentes les montrer que le nombre de triangles a la même parité que le nombre de segments sur le bord du carré.

Pour n'importe quel partage et quelle que soit la manière dont on a colorié les sommets !

$$x = 2^n \cdot \frac{a}{b}$$

Toute fraction x s'écrit


avec a et b impairs et n un nombre entier (peut-être négatif). Ainsi si $x=12/5$ on a $n=2$, $a=3$ et $b=5$, et si $x=7/8$ on a $n=-3$, $a=7$ et $b=1$. Par convention on pose $n=+\infty$ si $x=0$.







Dans le carré unité, on colorie un sommet de coordonnées (x, x') selon la règle :

- si les entiers n et n' associés à x et x' sont >0
- si $n \leq 0$ et $n \leq n'$
- si $n' \leq 0$ et $n > n'$



4) Colorier les sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ du carré. Quelles couleurs voit-on sur les différents côtés du carré ?

5) En comptant les segments   sur le périmètre du carré montrer qu'il existe au moins un triangle   

Reste à comprendre ce que les triangles    ont de particulier : si U est l'aire d'un triangle    , par exemple de sommets

$$\text{red smiley}=(0,0) \quad \text{green smiley}=(x,y) \quad \text{et} \quad \text{blue smiley}=(x',y'),$$

alors $U = (xy' - x'y)/2$ et un calcul élémentaire, que nous admettons, montre que U est une fraction de la forme

$$2^n \cdot \frac{a}{b}$$

avec $n < 0$.

6) En déduire que si dans notre partage du carré tous les triangles ont une même aire, alors il y a un nombre pair de triangles.