Activité phare

Descriptif de l'activité:

On dispose d'une plaque recouverte de piquets situés à égale distance les uns des autres (et de ficelle). Le piquet situé en bas à gauche est supposé être un phare. On demande aux enfants d'entourer les piquets qui seront balayés par la lumière du phare. Cette activité fait travailler la notion de repère dans le plan, de droite, de divisibilité d'un nombre par un autre.

Déroulement de l'activité:

Le but de cette activité est de faire comprendre aux enfants que s'il existe un nombre qui divise à la fois les deux coordonnées du piquet alors le piquet est dans l'ombre.

Pour cela on propose les plaques sans parler de coordonnées et on leur demande en le montrant si un piquet est éclairé ou non.
On leur demande ensuite combien de piquets sont dans l'ombre de celui-ci, celui-là.
Enfin, on leur demande comment repère-t-on ce piquet qui est dans l'ombre?
Si pas de réponse alors on demande sur quelle ligne, quelle colonne...
On leur fait ensuite remplir deux tableaux:

Piquets éclairés	***colonne***	***ligne***

Piquets à l'ombre	***colonne***	***ligne***

On leur demande ensuite ce qu'ils remarquent.

Explications mathématiques:

Les piquets éclairés sont répartis selon un dessin présentant deux axes de symétrie, le motif d'un quadrant étant répété symétriquement dans les trois autres quadrants.
Les points de la grille peuvent être repérés par leur coordonnées (a,b), qui sont des nombres entiers (positifs ou négatifs). On appellera donc les points de la grille des points entiers. Nous allons maintenant voir pourquoi les piquets éclairés par le phare sont exactement les points entiers dont les coordonnées (a,b) sont des nombres premiers entre eux.

Considérons une droite D joignant le phare et un point de la grille. On regarde ensuite les points entiers M et M' de la droite D qui sont les plus proches possibles du phare. Notons (a,b) les coordonnées de M, alors les coordonnées de M sont (a',b'). Alors, il est clair que a et b sont premiers entre eux, car si ce n'était pas le cas, on aurait $a=da1$ et $b=db1$ avec $d\geq 2$ entier, et donc le point de coordonnées (a1,b1) serait un point entier de D, plus proche du phare que M, ce qui est impossible.

Ceci nous dit qu'un piquet éclairé par le phare est un point entier dont les coordonnées sont des nombres premiers entre eux.

Pour voir que la réciproque est vraie (c'est-à-dire qu'un point entier dont les coordonnées sont des nombres premiers entre eux est un piquet éclairé), nous aurons besoin d'un résultat d'arithmétique connu sous le nom de lemme de Gauss. Son énoncé fait intervenir trois entiers a, b, c : il dit que si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc, alors a divise c. (Rappel : « a divise c » veut dire que c est un multiple de a.) Nous admettons ici le lemme de Gauss. Voir aussi (lien vers les mauvais prix) où est expliqué le lien avec le théorème de Bézout.

Soit donc M un point entier dont les coordonnées (a,b) sont des nombres premiers entre eux. Notons P le phare et appelons D la droite (MP). Comme on l'a vu précédemment, parmi les points entiers qui sont sur D, il y en a deux qui sont à distance minimale du phare P. Ce sont les points éclairés de D, et leurs coordonnées sont premières entre elles. Notons N celui d'entre eux qui est du même côté que M, et (c,d) ses coordonnées. Comme M et N sont sur la même droite, on a a/b=c/d. On en déduit que ad=bc, donc a divise bc, or a et b sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss on obtient que a divise c. Ceci signifie que c est un multiple de a, c'est-à-dire que c=na pour un certain entier n. En reportant on trouve que d=nb. Donc la distance NP est égale à n fois la distance NP. Comme NP est la distance minimale entre les points de D et P, on doit avoir n=1. Il s'ensuit qu'en fait M=N, donc M est un point éclairé.

On a bien démontré qu'un point entier dont les coordonnées sont des nombres premiers entre eux est un piquet éclairé.