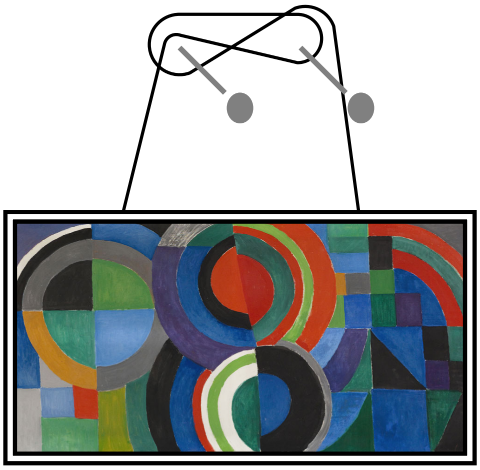
Explications de l'activité

Des clous !

2. Si on enlève le clou de gauche, le tableau reste accroché au clou de droite. Mais si on enlève le clou de droite, le tableau tombe.

   Cela peut éventuellement donner l'idée de faire autour du clou de droite quelque chose qui « ressemble » à ce que l'on avait fait autour de celui de gauche, ce qui donne une solution au problème :



3. La question est très ouverte, elle vient pour essayer d'amener à coder l'information. Par exemple, une réponse comme : « on dit qu'on passe autour du clou de gauche, en précisant dans quel sens et en faisant combien de tours, puis combien de tours autour du clou de droite et

dans quel sens, puis combien autour du clou de gauche et dans quel sens etc. » est très bien.

Une telle réponse permet aussi d'aiguiller vers une solution : on peut comprendre plus facilement qu'en ôtant le clou de gauche, on perd tous les tours faits autour de ce clou pour ne garder que ceux faits autour du clou de droite. Le tableau tombe si on a fait autant de tours dans un sens que dans l'autre autour du clou de droite. On raisonne bien sûr de même si on enlève le clou de droite. Conclusion : les accrochages qui conviennent sont ceux pour lesquels la ficelle tourne autour de chaque clou autant de fois dans le sens des aiguille d'une montre que dans le sens inverse.

4. Avec ce codage : le mot convient si et seulement s'il y a autant de a que de A et autant de b que de B. En effet, quand on retire le clou de gauche on fait disparaître les a et les A, et le tableau tombe si et seulement si on a autant de b que de B. Quand on retire le clou de gauche on fait disparaître les b et les B, et le tableau tombe si et seulement si on a autant de a que de A.

Pour aller plus loin

5. Ceci se généralise à un plus grand nombre de lettres : on considère un parcours de la ficelle autour de (par exemple) 10 clous, codé par un mot sur l'alphabet a,A,b,B,...,j,J. Retirer un clou revient à supprimer dans notre mot toutes les lettres correspondant à ce clou. Le tableau tombe si et seulement si le mot devient “trivial”, au sens où en utilisant les règles $aA = Aa = bB = Bb = \cdots = 1$ on arrive à supprimer successivement toutes les lettres du mot. Cette description ne nous dit pas comment trouver un mot qui convienne ; ici les *commutateurs* peuvent aider. Pour un mot m, on note M le mot inverse, celui qu'entre matheux on

est habitué à noter m^{-1}, et on note appelle commutateur de m et d'une lettre x le mot $[m, x] = mxMX$.

Pour deux clous, le mot le plus simple qui convienne est $[a, b] = abAB$. Pour trois clous, une solution est donnée par le commutateur

$$[[a, b], c] = abABcbaBAC.$$

De façon générale, si m est un mot sur les 9 premières lettres (et leurs majuscules) qui convient pour 9 clous, alors le mot $[m, j]$ convient pour 10 clous.

Le tableau reproduit sur cette feuille est de Sonia Delaunay.