Explication de l'activité
Bulles

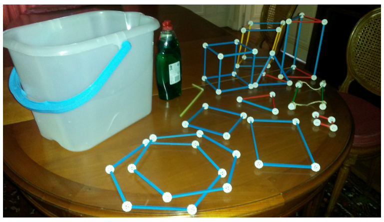
Niveaux concernés : collège, et, pour la seconde partie, à partir de la Troisième, lycée.

Effectif : classe entière pour la première partie, travail en petits groupes pour la deuxième.

Durée de l'atelier : 45 minutes pour la première partie, variable en fonction des objectifs pour la deuxième partie. La deuxième partie peut être abordée indépendamment de la première.

Plan

Première partie : bulles



Matériel à prévoir :

- une cuvette ou un seau de 30 cm de profondeur ;
- une bouteille de liquide vaisselle (idéalement du Dreft, en vente en grande surface en Belgique) ;
- un kit ZOME (assemblage de polyèdres qui était disponible chez didacto), ou des " connecteurs souples" chez www.celda.fr, ou des piques à brochettes et de la patafix ou de la pâte à modeler, ou encore des pailles et de la ficelle (plus long !) ; pour un prêt du kit sur Paris, contacter : diffusion@math.univ-paris-diderot.fr.
- facultatif : une paille.

Préparation. Remplir la cuvette ou le seau avec de l'eau puis ajouter suffisamment de liquide vaisselle pour que le film d'eau savonneuse sur une forme carrée se forme sans problème (s'il s'agit de Dreft, il y a besoin de mettre moins de produit que si c'est un autre liquide vaisselle). Attention à verser le liquide vaisselle dans l'eau et non l'inverse car il ne faut pas faire de mousse. Il faut poser la cuvette ou le seau sur une table suffisamment élevée pour que tous les élèves voient bien. Préparer toutes les formes avant l'activité à savoir un triangle, un rectangle, un carré, un losange, une forme composée de deux arêtes solides reliées deux à deux par de la ficelle, un tétraèdre, un cube et deux hexagones (ou autres polygones, l'important est que ces deux derniers doivent être identiques et suffisamment grands pour y passer la main). Avec le kit zome, le tétraèdre se fait avec 3 bâtons rouges et trois bleus, le cube uniquement avec des bleus.

Objectif de la première partie. Révision du vocabulaire de géométrie : polygones, quadrilatères, triangle équilatéral/isocèle..., solides (cube, tétraèdre, prisme, parallélépipède), faces, sommets, arêtes (éventuellement, introduction de la relation d'Euler reliant le nombre de faces, d'arêtes et de sommets pour ces solides) ; notion de surfaces minimales ; démonstration en géométrie.

Explication de l'activité. Lorsqu'on plonge une forme dans l'eau savonneuse, elle en ressortira avec un film de savon en contact avec toutes les arêtes et qui "prendra le moins de place possible", c'est-à-dire un film dont la surface est minimale. Si la forme est un polygone, alors le film forme naturellement un morceau de plan à l'intérieur, mais si la forme est en 3 dimensions, alors les choses deviennent plus compliquées et intéressantes.

Déroulement de l'activité avec les élèves. La première partie de l'activité se déroule sous forme de questions-réponses illustrées à l'aide des formes géométriques plongées dans l'eau savonneuse.

Reprendre le scénario de cycle 3 décrit dans la fiche de l'activité Bulles en école élémentaire :

https://www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/_media/fiches/bulles-primaire.pdf.

On peut y adjoindre d'autres solides du programme comme le prisme ou le parallélépipède non rectangle. Pour chaque solide, on pourra faire remplir aux élèves un tableau indiquant les nombres F de faces, S de sommets et A d'arêtes, et faire calculer F+S-A (pour ceux qui connaissent les entiers relatifs, ou pour les introduire, on peut faire calculer S-A+F). On trouve toujours 2, ce qui est la relation d'Euler (Léonhard Euler, mathématicien-physicien suisse, 1707-1783). On notera que la relation d'Euler n'est vérifiée que pour des formes « sans trous » (voir par exemple la page wikipédia sur le Théorème de Descartes-Euler pour en savoir plus).

Deuxième partie : le problème de Steiner

Déroulement de l'activité avec les élèves. *La partie sur le théorème de Héron peut faire l'objet d'une activité de recherche dès la classe de Cinquième. La suite pourra être traitée sous forme d'exercices à partir de la classe de Troisième en adaptant les objectifs au niveau des élèves.*
Lors des expériences sur les films de savon, faire remarquer sur le tétraèdre et le cube que les surfaces se rencontrent avec des angles semblant être de 120°. Faire remarquer que c'est aussi le cas dans les ruches, les bulles faites de manière aléatoire dans un évier.
Ici, on va démontrer une propriété analogue mais en dimension inférieure : on s'intéresse au problème de Steiner. Pour cela, on va d'abord étudier deux problèmes intermédiaires. Suivant le temps imparti, on pourra s'intéresser uniquement au Théorème de Héron, ou aborder le Théorème de Héron et l'ellipse sans nécessairement étudier le problème de Steiner en lui-même.

Outils mathématiques utilisés

1. Théorème de Héron

- symétrie axiale : construction du symétrique d'un point, conservation des angles et des longueurs ;
- égalité de deux angles opposés par le sommet ;
- la droite est le plus court chemin d'un point à un autre du plan.

2. Propriété de l'ellipse

- un cercle sépare les points du plan en trois régions : les points à une distance du centre strictement inférieure au rayon, ceux à une distance du centre égale au rayon, ceux à une distance du centre strictement supérieure au rayon.

3. Problème de Steiner et point de Fermat

- notion de tangente à un cercle en un point, orthogonalité de la tangente et du rayon ;
- construction d'un triangle équilatéral à la règle et au compas ;
- construction du cercle circonscrit à un triangle ;
- relation entre les angles dans un triangle ; savoir déterminer la mesure de l'angle à la base d'un triangle isocèle lorsque la valeur de l'angle au sommet est connue ;
- additivité des angles ;
- théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre (la dernière question pourra être l'occasion d'énoncer la réciproque du théorème) ;
- raisonnement par l'absurde.

Théorème de Héron : problème du cowboy et de son cheval

Activité de recherche, problème ouvert, peut être réalisé en petits groupes dès la classe de Cinquième.

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan.

Soient C (le cowboy et son cheval) et R (le ranch) deux points dans le même demi-plan par rapport à $\mathcal{D}$.

Le problème est alors le suivant : le cheval a besoin d'aller boire à la rivière modélisée par la droite $\mathcal{D}$ et le cowboy veut rentrer au ranch en parcourant le moins de chemin possible.

Plus concrètement, on cherche le point D de $\mathcal{D}$ tel que $CD + DR$ soit minimal, c'est-à-dire le plus petit possible (voir Figure 1).

Prévoir 5 minutes de recherche individuelle pour que chacun puisse s'approprier le problème, puis répartir les élèves en groupes de 3-4 (avec un modérateur pour le niveau sonore et un assesseur qui prend des notes) pendant 20 à 25 minutes. Les questions suivantes sont autant de coups de pouce à donner aux élèves.

1. Penser à une symétrie axiale.
2. Considérer le symétrique S de C par rapport à la droite $\mathcal{D}$. *On pourrait tout aussi bien raisonner à partir du symétrique du point R.*
3. Montrer que $CD = SD$.
Solution : utiliser la symétrie axiale (voir Figure 2).
4. On cherche donc la position de D sur $\mathcal{D}$ tel que $SD + DR$ soit minimal.
Solution : D est le point d'intersection entre les droites (non parallèles) $\mathcal{D}$ et (SR) : $\{D\} = (SR) \cap \mathcal{D}$. En effet, le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite ! (voir Figure 3).
5. *Théorème de Héron.* Soient H et I deux points de $\mathcal{D}$, distincts de D, de part et d'autre de D comme sur la Figure 4. Montrer que $\widehat{CDH} = \widehat{IDR}$.
Solution : par symétrie axiale $\widehat{CDH} = \widehat{HDS}$; comme les angles $\widehat{HDS}$ et $\widehat{IDR}$ sont opposés par le sommet ils sont égaux.

Prévoir 2 à 3 minutes de restitution par groupe. Le professeur reprend alors le problème en réécrivant au tableau les questions sous forme d'un exercice que les élèves pourront rédiger pour le cours suivant.

Une propriété de l'ellipse

Il faudra d'abord introduire la définition de l'ellipse (elle n'est certes plus au programme, mais tout de même, les planètes ne tournent-elles pas autour du soleil selon des ellipses ?). Il faut voir l'ellipse comme "un cercle avec deux centres". Plus précisément, soient F_1 et F_2 deux points du plan qu'on nommera les foyers, et soit r un nombre réel strictement plus grand que la distance F_1F_2. Alors, l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F_1 et F_2 et de grand axe de longueur r est l'ensemble des points P du plan tels que $PF_1 + PF_2 = r$ (voir Figure 5).

Pour familiariser les élèves avec cette définition, on pourra construire une ellipse au tableau de la manière suivante : fixer d'abord deux points au tableau (les foyers F_1 et F_2) ; prendre une ficelle de longueur assez nettement supérieure à la distance entre les deux foyers ; demander à un assistant de tenir fixées les deux extrémités de la ficelle aux deux foyers ; tracer l'ellipse avec un feutre ou une craie placé à l'intérieur de la ficelle en faisant en sorte que la ficelle soit tendue. On fera comprendre aux élèves, éventuellement à l'aide de la ficelle de construction, que, de même qu'un cercle permet de séparer les points du plan en trois régions (les points à une distance au centre du cercle égale au rayon, strictement inférieure au rayon, strictement supérieure au rayon), l'ellipse permet de séparer les points en trois régions (ceux dont la somme des distances aux foyers est égale/strictement supérieure/strictement inférieure au grand axe). On peut aussi familiariser les élèves à la notion d'ellipse et à ses propriétés lors d'une séance sur machines avec Geogebra.
On considère donc l'ensemble $\mathcal{E} = \{P \in \text{Plan}/PF_1 + PF_2 = r\}$, que l'on appelle l'ellipse de foyers F_1 et F_2 et de grand axe de longueur r. Soit P un point de $\mathcal{E}$ et notons T_P la droite tangente à $\mathcal{E}$ en P.

1. Soit Q un point de T_P différent de P, que dire de $QF_1 + QF_2$?
   Solution : $QF_1 + QF_2 > r$ car Q est "à l'extérieur" de $\mathcal{E}$ (voir Figure 6).

2. Soient Q_1 et Q_2 deux points de T_P, distincts de P, de part et d'autre de P comme sur la Figure 7. Montrer que les angles $\widehat{Q_1PF_1}$ et $\widehat{F_2PQ_2}$ sont égaux.
   Solution : P est le point de T_P tel que $PF_1 + PF_2$ soit minimal, il suffit alors d'appliquer le théorème de Héron vu précédemment.

Problème de Steiner et point de Fermat

Soit ABC un triangle dont aucun des angles n'est supérieur ou égal à 120°. Le problème de Steiner est le suivant : on cherche un point P à l'intérieur du triangle ABC tel que $PA + PB + PC$ soit minimal. Ce point P, s'il existe, est appelé point de Fermat.

1. Supposons qu'un tel point P de Fermat existe, i.e. un point P minimisant $PA + PB + PC$.

   Traçons le cercle $\mathcal{C}$, de centre C et passant par P, et l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers A et B passant par P.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ sont tangents en P.
   Solution : raisonnons par l'absurde. S'ils ne sont pas tangents, il existe un point P' qui est à la fois à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ (donc $P'C<PC$) et à l'intérieur de l'ellipse $\mathcal{E}$ (donc $P'A+P'B<PA+PB$) d'où $P'A + P'B + P'C < PA + PB + PC$ (voir Figure 8).

   (b) Montrer que $\widehat{CPB} = \widehat{CPA}$.
   Solution : faire un dessin (voir Figure 9), et appliquer la propriété de l'ellipse vue précédemment, d'où $\widehat{Q_2PB} = \widehat{Q_1PA}$; puis, utiliser le fait que T_P étant aussi tangente au cercle $\mathcal{C}$ en P, on a $\widehat{CPQ_2} = \widehat{CPQ_1} = 90°$.

   (c) Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CPB} = \widehat{CPA} = 120°$.
   Solution : $\widehat{APB} + \widehat{CPB} + \widehat{CPA} = 360°$ or $\widehat{CPB} = \widehat{CPA}$ et en raisonnant de la même manière en traçant le cercle de centre A et passant par P et l'ellipse de foyers B et C et passant par P on a $\widehat{APB} = \widehat{CPA}$.

   Ainsi, s'il existe un tel point P de Fermat, alors il est tel que $\widehat{APB} = \widehat{CPB} = \widehat{CPA} = 120°$.

2. Plutôt que de chercher à montrer l'existence d'un point de Fermat, on va construire un point P vérifiant $\widehat{APB} = \widehat{CPB} = \widehat{CPA} = 120°$. Pour cela, construire les points D, E et F de sorte que les triangles BDC, ACE et BAF soient équilatéraux et à l'extérieur du triangle ABC (*voir Figure 10*). Construire :

   le cercle $\mathcal{C}_1$, circonscrit au triangle BDC ;

   le cercle $\mathcal{C}_2$, circonscrit au triangle ACE ;

   le cercle $\mathcal{C}_3$, circonscrit au triangle BAF.

   On va montrer que ces trois cercles se coupent en un point P qui convient.

   (a) Montrons que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont deux points communs. Le point C est commun à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Par l'absurde, supposons que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ n'ont pas d'autre point commun que C. Alors, ils sont tangents en C et notons T_C leur tangente commune. Notons O_1 le centre de $\mathcal{C}_1$ et O_2 le centre de $\mathcal{C}_2$ (voir Figure 11).

   - Montrer que $\widehat{BDC} = 60°$. *Solution : DBC équilatéral.*
   - Montrer que $\widehat{BO_1C} = 120°$.
     Solution : utiliser la relation angle inscrit-angle au centre.
   - Montrer que $\widehat{BCO_1} = 30°$.
     Solution : CO_1B *isocèle et* $\widehat{BO_1C} = 120°$. *On peut aussi remarquer que le point* O_1 *est l'intersection des médianes du triangle équilatéral* BCD *de sorte que* O_1 *appartient à la bissectrice de l'angle* $\widehat{BCD}$, *d'où* $\widehat{BCO_1} = \frac{1}{2}\widehat{BCD}$.
   - Montrer de même que $\widehat{ACO_2} = 30°$.
   - Montrer que : $180° = \widehat{O_1CB} + \widehat{BCA} + \widehat{ACO_2}$.
     Solution : utiliser le fait qu'en un point du cercle, la tangente est perpendiculaire au rayon, de sorte que les points O_1, C *et*

O_2 sont alignés.

- Montrer que $\widehat{BCA} = 120°$. Absurde.

(b) Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont donc deux points communs, C et l'autre que l'on notera P.

Montrer que $\widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120°$. *Solution : utiliser la propriété de l'angle inscrit pour chacun des deux cercles. Voir Figure 12.*

(c) Montrer que $\widehat{APB} = 120°$. *Solution :* $\widehat{APB} + \widehat{CPA} + \widehat{BPC} = 360°$.

(d) Étudier la Figure 13. Montrer que l'angle colorié en jaune $\widehat{AO_3B}$ vaut $240°$ et en déduire que les angles coloriés $\widehat{APB}$ et $\widehat{AO_3B}$ vérifient : $\widehat{AO_3B} = 2\widehat{APB}$.

Solution : utiliser les propriétés du triangle équilatéral ABF.

(e) En déduire que le point P appartient aussi au cercle $\mathcal{C}_3$.

Solution : utiliser la réciproque de la propriété de l'angle inscrit, que l'on pourra introduire à cette occasion.

Donc le point P, qui est à l'intersection de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ vérifie bien la propriété $\widehat{APB} = \widehat{CPB} = \widehat{CPA} = 120°$.

Conclure. *Faire réfléchir les élèves sur ce que l'on a montré et ce que l'on n'a pas montré. Il resterait à montrer que le point P ainsi construit est bien un point de Fermat (i.e. qu'il minimise bien $PA + PB + PC$). On peut aussi se demander s'il est le seul point de Fermat, ou s'il est le seul point tel que $\widehat{APB} = \widehat{CPB} = \widehat{CPA} = 120°$.*

Annexes. Les figures à projeter :

https://www.math.univ-paris-diderot.fr/diffusion/_media/fiche_bulles-secondaire-figures.pdf

Bibliographie. Stefan Hildebrandt and Anthony Tromba, *Mathematics and optimal forms*, Scientific American Library, New York, 1985.