Explications de l'activité

Des carreaux pas carrés !

Etape n°1 : les rectangles

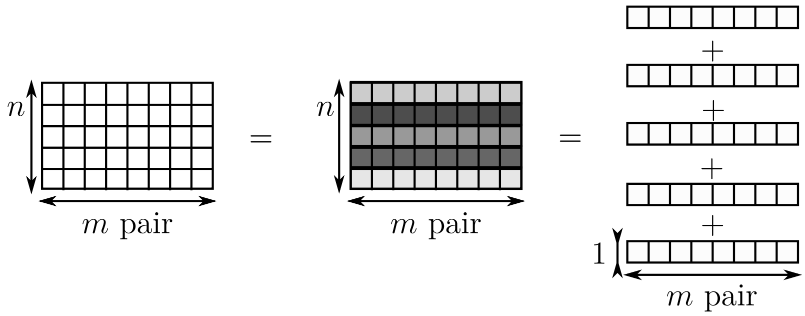
1) On peut carreler les pièces de taille 4×6 et 5×6, il est facile d'exhiber un pavage. Dans le premier cas on peut, par exemple, mettre tous les dominos (c'est à dire les carrés de taille 1×2) horizontaux car 6 est pair, i.e., divisible par 2, ou tous verticaux car 4 est pair. Dans le deuxième cas, on peut les mettre tous horizontaux (toujours car 6 est pair) mais on ne peut pas les mettre tous verticaux.

On ne peut pas carreler la pièce de taille 5×5 sans couper de carreaux. Cependant, il faut bien comprendre que ne pas y arriver en tâtonnant n'est pas une preuve du fait que le pavage est impossible, ça veut juste dire qu'on n'y est pas arrivé, peut être parce qu'on s'y est mal pris. On est donc amené à énoncer une *condition nécessaire* pour pouvoir paver la pièce par des carreaux de taille 1×2 : puisque chaque domino recouvre une aire de 2 unités (ici des décimètres carrés), toute surface pavée par des dominos doit avoir une aire divisible par 2, i.e., une aire paire. Or $5 \times 5 = 25$ est impair, donc la pièce de taille 5×5 ne peut pas être pavée.

2) Une *condition nécessaire* pour que le rectangle de taille $n \times m$ soit pavable par des dominos a été énoncé précédemment : il faut que son aire

$n \times m$ soit paire. Ceci est équivalent à dire que n et/ou m est paire (ne pas hésiter à le faire reformuler).

Pour répondre à la question il reste à voir que c'est une condition suffisante. Pour cela il suffit d'exhiber un pavage pour toute pièce de taille $n \times m$ avec n et/ou m pair. Supposons par exemple que m est pair. Alors chaque ligne de largeur m et de hauteur 1 peut être recouverte par $m/2$ dominos. Il suffit de paver chaque ligne l'une après l'autre pour obtenir un pavage du rectangle tout entier.



Etape n°2 : les rectangles dont on a enlevé 2 coins opposés

3) On arrive en tâtonnant à paver le rectangle dont on a enlevé deux coins opposés s'il est de dimension 5×6 (voire plus loin pour une méthode générale de pavage) mais on n'arrive pas à paver ceux de taille 5×5 ni 4×6.

Nous pouvons ré-utiliser la condition nécéssaire énoncée à l'étape 1 pour conclure qu'il est effectivement impossible de réaliser un pavage par des dominos dans le cas d'un rectangle de taille 5×5 dont on a enlevé les coins : en effet, cette surface a une aire de $25 - 2 = 23$ unités, ce qui n'est pas divisible par 2. Cependant, cet argument ne permet pas de conclure dans le cas du rectangle de taille 4×6, car l'aire de la surface à paver est de 22 unités.

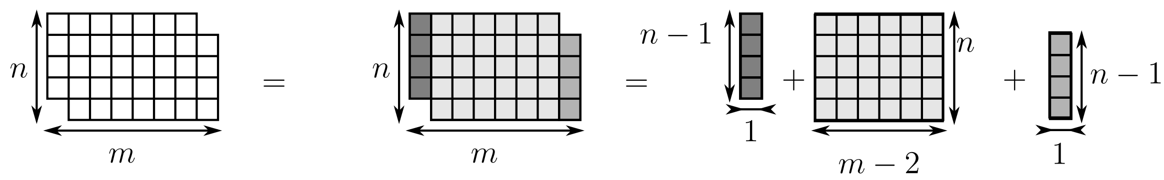
Il faut donc une nouvelle idée, pour introduire une nouvelle condition nécessaire : introduire un coloriage en gris et blanc des cases, en damier. C'est une idée qui n'émerge pas forcément naturellement, ne pas hésiter à suggérer de représenter un échiquier. Dans ce coloriage, toutes les cases voisines d'une case blanche sont grises, et vice et versa. Un domino recouvre deux cases voisines, donc automatiquement une case blanche et une case grise. Une *deuxième condition nécessaire* pour qu'une forme soit pavable par des dominos est que le nombre de cases blanches soit égale au nombre de cases grises.

Reprenons l'exemple du rectangle de taille 4×6. Colorions ses cases avant d'enlever les coins. Avant qu'on enlève les coins du rectangle, on constate que celui-ci contient 12 cases blanches et 12 cases grises - il est pavable par des dominos, rappelons-le. Cependant lorsqu'on enlève deux coins opposés, on enlève deux cases de même couleur - deux cases grises sur la figure. Ainsi la surface obtenue n'est plus pavable par des dominos car elle contient 12 cases blanches et seulement 10 cases grises.

4) L'aire de la surface à paver est de $n \times m - 2$, donc la première condition nécessaire pour pouvoir paver par des dominos un rectangle $n \times m$ dont on a enlevé deux coins est que $n \times m - 2$ soit pair, ce qui est équivalent à dire que $n \times m$ doit être pair, ou encore que n et/ou m doit être pair.

Supposons par exemple que m est pair, et regardons le coloriage obtenu dans le rectangle $n \times m$ avant qu'on enlève les coins. Colorions par exemple en gris le coin en bas à gauche. Si n est pair, le coin en haut à droite du rectangle $n \times m$ est colorié en gris, tandis que si n est impair ce coin est colorié en blanc. Le carré $n \times m$ pris en entier est pavable, donc il contient autant de cases blanches que de cases grises. Une deuxième condition nécessaire pour que le carré $n \times m$ dont on a enlevé deux coins opposés soit pavable est qu'on enlève exactement une case blanche et une case grise. Autrement dit, il faut que le rectangle ait une de ses dimensions paire et l'autre impaire : m pair et n impair, ou n pair et m impair.

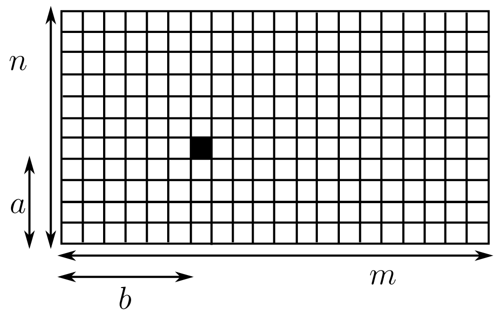
Est-ce une *condition suffisante*? Oui, car dans ce cas nous pouvons exhiber un pavage. Supposons par exemple que m est pair et n impair, et divisons le rectangle $n \times m$ dont on a enlevé deux coins en 3 parties : la première colonne de taille $(n-1) \times 1$, la partie du milieu de taille $n \times (m-2)$ et la dernière colonne de taille $(n-1) \times 1$. D'après la question 1, chacun de ces trois morceaux est pavable par des dominos, donc l'ensemble l'est aussi.



Etape n°3 : les rectangles dont on a enlevé une case

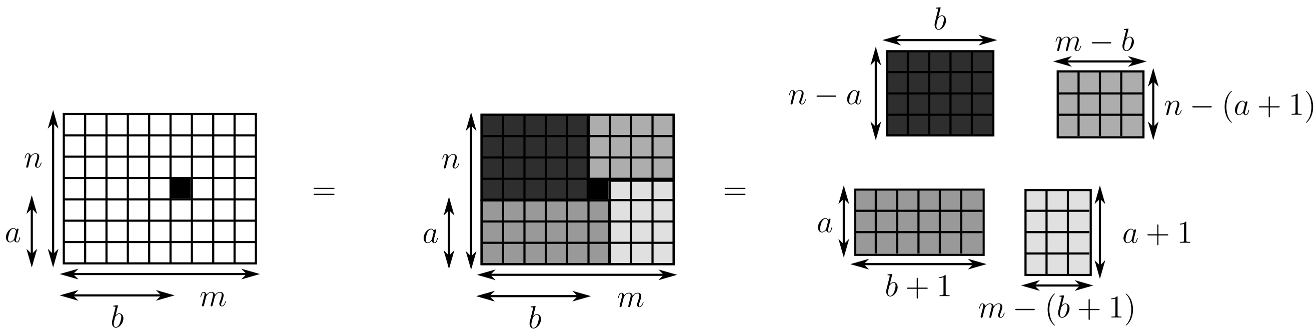
5 et 6) On arrive en tâtonnant à paver le rectangle 5×5 dont on a enlevé la case du milieu, mais pas les deux autres.
La première condition nécessaire que nous avons donnée porte sur le nombre de cases : un rectangle de taille $n \times m$ dont on a enlevé une case a une aire de $n \times m - 1$ unités, donc une condition nécessaire pour pouvoir paver cette forme avec des dominos est que $n \times m$ soit impair, c'est à dire n et m impairs. Ceci exclut qu'on puisse paver le rectangle 4×6 dont on a enlevé une case, où qu'elle soit située.

La deuxième condition nécessaire porte sur la couleur des cases. Colorions les cases du rectangle $n \times m$ avant d'en enlever une case, en coloriant par exemple en gris la case en bas à gauche. Puisque n et m sont impairs, la case en haut à droite du rectangle est également grise, et le rectangle contient une case grise de plus que de cases blanches. Pour qu'on puisse paver notre forme avec des dominos, il faut donc nécessairement que la case qu'on retire soit grise. Il est alors utile d'introduire les paramètres entiers a et b qui vont coder la position de la case que l'on retire, comme illustré sur la figure ci-dessous.



La case que l'on retire est grise si et seulement si a et b ont même parité. Ainsi, on a prouvé qu'il est impossible de paver la 3ème forme dessinée.

Nous avons obtenu la condition nécessaire suivante : n et m sont impairs, et a et b ont la même parité. On peut à nouveau montrer que c'est une condition suffisante, en exhibant un découpage de notre forme en sous-ensembles qu'on sait déjà être pavables. Remarquons en effet que si n, m, a et b sont impairs, alors $n-a, m-b, a+1$ et $b+1$ sont pairs, ce qui implique que chacun des quatre sous-rectangles du découpage ci-dessous est pavable ; si n et m sont impairs et a et b sont pairs, alors $b, n-(a+1), m-(b+1)$ et a sont pairs ce qui prouve aussi que les quatre sous-rectangles sont pavables.



Etape n°4 : des formes bizarres

7) La première forme a une aire de 9 unités, donc ne satisfait pas la première condition nécessaire pour être pavable. Toutes les formes suivantes ont une aire de 10 unités et satisfont la première condition nécessaire.

Lorsqu'on colorie les cases en blanc et gris en damier, on voit que la deuxième forme n'a pas le même nombre de cases blanches que de cases grises, donc elle ne satisfait pas la deuxième condition nécessaire pour être pavable par des dominos. Les trois formes suivantes satisfont cette condition.

En tâtonnant on arrive à paver les troisième et quatrième formes par des dominos.

En revanche, la cinquième forme ne peut pas être pavée par des dominos, bien qu'elle satisfasse les deux conditions nécessaires déjà évoquées. Il s'agit bien de conditions nécessaires, mais pas de conditions suffisantes ! On peut se convaincre de l'impossibilité du pavage en regardant ce qu'il se passe dans le coin en haut à gauche : si la case tout en haut est pavée, alors la case juste en-dessous est elle-aussi recouverte par le même carreau de carrelage, ce qui laisse la case la plus à gauche complètement isolée et donc impossible à paver.

Commentaire

Cet atelier est largement inspiré des travaux de l'équipe de recherche "Maths à modeler" de Grenoble en lien avec l'IREM de Grenoble, voir par exemple à l'adresse ci-dessous :
http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/sirc_paf_200fd7f.pdf

PARIS IREM

LES MATHS FANTASTIQUES