Explication de l'activité

Chocolats mortels

Le jeu de la première partie (la boîte de chocolats) est très proche des plus classiques « course à 20 », ou du « jeu des allumettes ». Il permet de comprendre la notion de *stratégie gagnante* avant d'aborder un jeu un peu plus compliqué : le jeu de la tablette de chocolat (chomp game, en anglais).

Jeu de la boîte de chocolats

En résumé : La boîte a un nombre de chocolats congru à $1 \mod 4$, le premier joueur laisse nécessairement un nombre non congru à $1 \mod 4$, le deuxième peut le ramener à un nombre congru à $1 \mod 4$ etc. Les explications détaillées sont ci-dessous.

1. Quand les élèves jouent un peu au hasard, il n'y a généralement pas de différence claire. Par contre, le professeur a tendance à gagner souvent...
2. Il vaut mieux laisser le prof commencer : s'il prend un chocolat, vous en prenez trois et il est contraint de prendre le carré empoisonné. S'il en prend deux, vous en prenez deux et il est contraint de prendre le dernier. S'il en prend un seul, vous en prenez trois et vous avez gagné.
3. On se ramène au cas précédent, en prenant « le complément à 4 » du nombre de chocolats pris par le premier joueur.

On dit que le deuxième joueur a une *stratégie gagnante* : cela signifie qu'il a un plan de jeu qui lui permet de gagner, quoi que joue l'adversaire. Cela ne veut pas dire que le deuxième joueur gagnera à tous les coups, mais qu'il gagnera à tous les coups s'il joue bien. Les « bons » coups à jouer dépendent bien sûr de ceux joués par le premier joueur.

4. Il faut choisir de jouer en deuxième. On laisse le carré empoisonné seul et on regroupe les autres quatre par quatre (mentalement, de préférence) :

À chaque coup du premier joueur, on répond en prenant le *complément à 4* de sa prise : 1 s'il en a pris 3, 2 s'il en a pris 2, 3 s'il en a pris 1. En procédant ainsi c'est lui qui prendra le dernier carreau.

(Le nombre initial de carré est congru à $1 \mod 4$. Le premier joueur laisse un nombre de chocolats non congru à $1 \mod 4$. Le joueur deux peut alors, quoi qu'ait fait le joueur 1, ramener le nombre de chocolats à un nombre congru à $1 \mod 4$. . . .)

Là, des questions supplémentaires sont possibles, mais si vous disposez de peu de temps, il est peut-être plus intéressant de passer à la suite qu'ajouter ces questions subsidiaires.

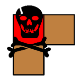
- Que se passe-t-il si la boîte contient 22 chocolats ?
- Si on change la règle du jeu, autorisant chaque joueur à prendre 1,2,3 ou 4 chocolats ? Plus dur : 1,2,4 (mais pas 3) chocolats ?
- Question bonus plus difficile : si on autorise à enlever 1, 2 ou 4 chocolats (mais pas 3) ? On peut alors forcer que le nombre de chocolats reste constant modulo 3 (si 1 je joue 2, si 2 je joue 1, si 4 je joue 2). Il faut alors faire en sorte qu'il reste égal à 1 modulo 3 après

notre coup. Par exemple pour 21 chocolats, c'est le joueur 1 qui a une stratégie gagnante en commençant par enlever 2 chocolats).

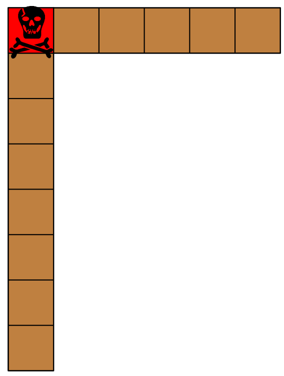
Jeu de la tablette de chocolat

1. On ne voit pas apparaître si facilement de stratégie gagnante, cette fois... On peut remarquer qu'il vaut mieux éviter certains coup, comme laisser juste une ligne ou juste une colonne (qui permettent alors à l'autre joueur de tout prendre d'un coup sauf le carré empoisonné et vous laisser mourir au tour suivant).

2. Le premier joueur a une stratégie gagnante : il peut commencer par prendre le carré en bas à droite. Quoi que fasse ensuite le deuxième joueur, le premier peut gagner.



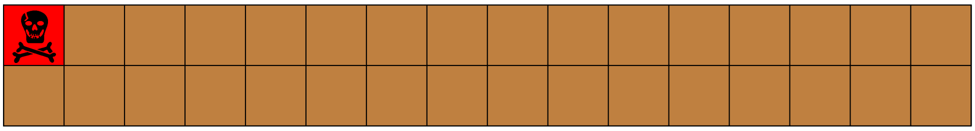
3. Le premier joueur enlève deux carreaux sur la colonne, en laissant 6. Le deuxième joueur joue nécessairement un coup qui « déséquilibre » le nombre de carrés sur la ligne et sur la colonne. Le premier joueur peut décider de les équilibrer etc. C'est alors le deuxième joueur qui prend le carré empoisonné.



4. Le premier joueur peut jouer juste en bas à droite du carré empoisonné, laissant alors une tablette avec une ligne et une colonne au deuxième joueur avec le même nombre de carrés. Ensuite, c'est comme dans la question précédente : le joueur 2 est obligé de déséquilibrer ligne et colonne, le joueur 1 peut toujours les équilibrer.

5. Stratégie gagnante pour le premier joueur : le premier joueur doit toujours se ramener à une configuration dans laquelle il y a exactement un carré de plus sur la première ligne que sur la deuxième. Si c'est le cas,

le coup du second joueur ne lui permet jamais de se ramener à cette situation (soit il équilibre les deux en prenant un carré sur la première ligne, soit il augmente l'écart en en choisissant un sur la deuxième ligne).



Jeu sur l'ordinateur :
Comme l'ordinateur est programmé pour suivre une stratégie gagnante, dès que vous faites une « erreur » (un coup qui n'est pas gagnant), c'est l'ordinateur qui a une stratégie gagnante, et comme il va la suivre vous ne pourrez plus gagner ! Comme dans le jeu du début avec la boîte de chocolat : si celui qui dispose d'une stratégie gagnante fait une erreur, il offre la stratégie gagnante à l'autre.

Pour aller plus loin

On peut en fait démontrer que l'un des joueurs a une stratégie gagnante (pour une taille de tablette $n \times m$ quelconque), comme c'est d'ailleurs le cas pour tous les jeux à deux joueurs, où les deux jouent l'un après l'autre, qu'il n'y a pas de hasard, qu'une partie se termine toujours en un nombre fini de coups par la victoire d'un des deux (pas de parties infinies, pas de parties nullles).
De plus, on peut démontrer que pour le jeu de la tablette de chocolat, c'est toujours le premier joueur qui a une stratégie gagnante (sauf quand il n'y a qu'un carré au départ), avec un argument assez amusant de « vol de stratégie » : supposons par l'absurde que le deuxième joueur ait une stratégie gagnante. Si le premier coup du premier joueur est de ne manger que le carré en haut à droite, le deuxième sait donc répondre à ce coup de manière à

avoir toujours une stratégie gagnante. Or, ce coup du deuxième joueur aurait pu être joué directement par le premier joueur, qui avait donc une stratégie gagnante ! Contradiction.

Par contre, on ne sait pas en général expliciter ces stratégies gagnantes ! On l'a fait dans quelques cas particuliers (tablettes carrées, tablettes $2 \times n$), mais on ne sait pas le faire en général.