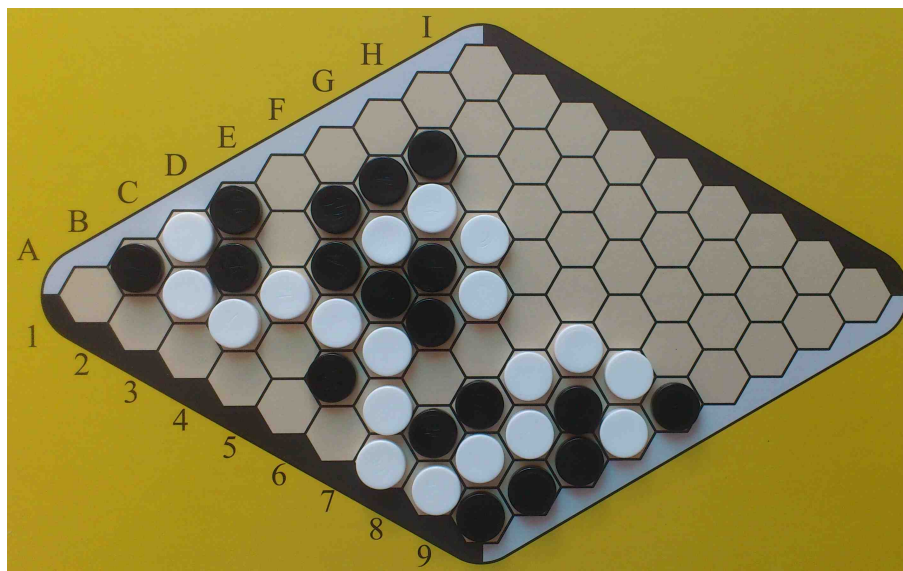




Jeu de Hex

Noémie et Bertrand ont décidé d'essayer le jeu de Hex. Ils ont devant eux un plateau en forme de losange, qui est pavé par de petits hexagones. Deux côtés opposés du plateau sont blancs, les deux autres sont noirs. Chaque joueur, à tour de rôle, va poser un pion de sa couleur sur le plateau - noir pour Noémie, blanc pour Bertrand. Le premier joueur qui réussit à relier les deux côtés du losange ayant sa couleur par un chemin de pions de sa couleur a gagné. Bertrand commence la partie.

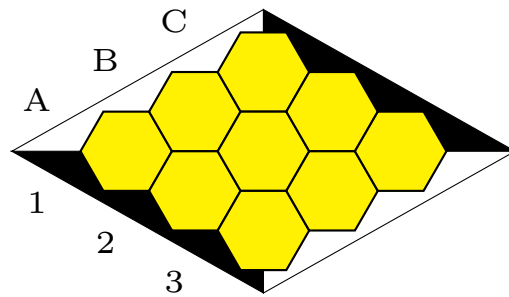
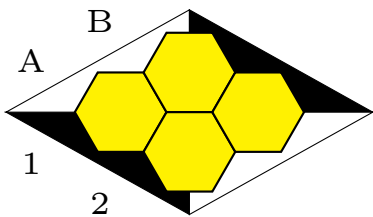
Qui va gagner ?...





1) Petits plateaux

Noémie et Bertrand choisissent d'abord de s'échauffer sur des plateaux de petite taille, 2 sur 2 et 3 sur 3.



a) À votre avis, qui va gagner ? Faites quelques essais...

b) Où Bertrand a-t-il intérêt à poser son premier pion ?

On dit qu'un joueur a une *stratégie gagnante* si, quelle que soit la façon dont son adversaire joue, il peut adapter ses coups pour être sûr de gagner.

c) Est-ce que l'un des joueurs a une stratégie gagnante ?

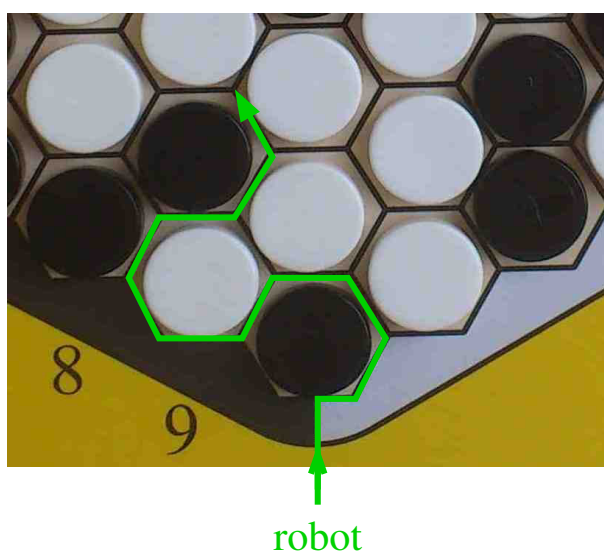


2) Les robots s'en mêlent

Noémie et Bertrand s'attaquent à des plateaux de jeu plus grands. Mais comment savoir si l'un d'eux a gagné ?

Ils ont l'idée d'utiliser un petit robot, qu'ils placent sur le plateau quand il est entièrement recouvert par des pions. Ce robot rentre sur le plateau par un de ses coins, en avançant sur la frontière entre le bord blanc du plateau, qu'il laisse à sa droite, et le bord noir du plateau, qu'il laisse à sa gauche.

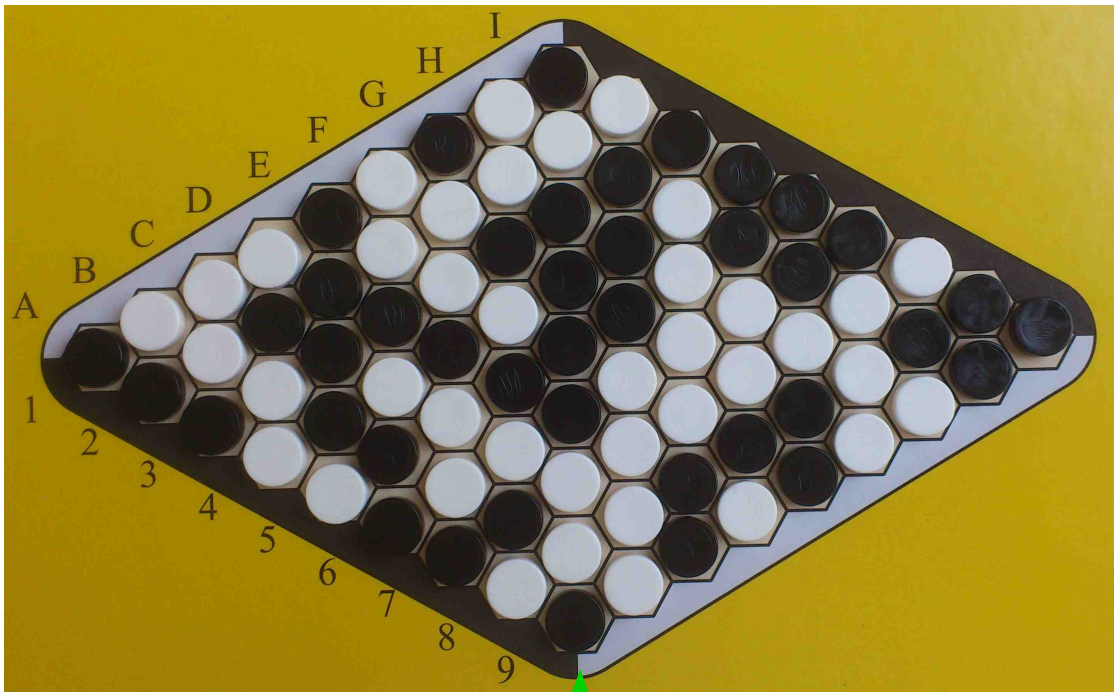
Le robot continue à avancer en restant sur les bords des cases et en laissant toujours les pions noirs (ou le bord noir) sur sa gauche et les pions blancs (ou le bord blanc) sur sa droite. Voici un exemple de ses premiers déplacements :



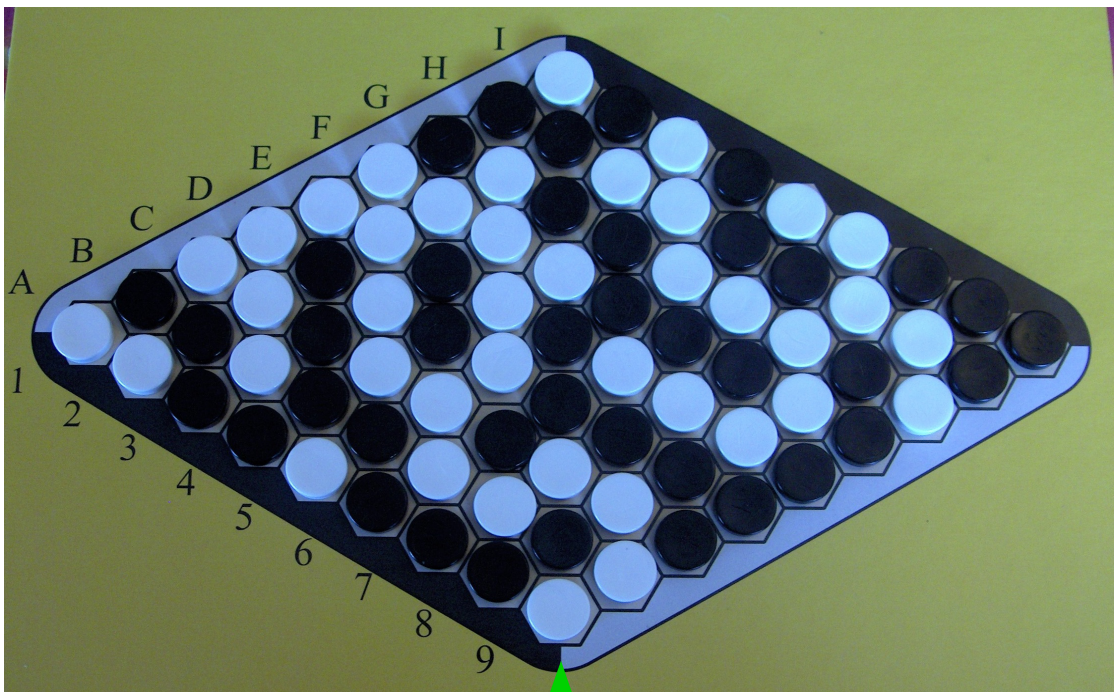


2) Les robots s'en mêlent (suite)

- a) Quel est le trajet décrit par le robot sur les deux plateaux de jeu représentés ? Qui a gagné la partie ? Où voit-on un chemin gagnant ?
- b) Pourquoi est-on sûr que le robot finit par sortir du plateau ?
- c) Pouvez-vous donner un exemple de plateau de jeu après une partie où personne n'a gagné ?



robot



robot



3) Existence d'une stratégie gagnante

Pour comprendre le déroulement de parties sur de grands plateaux, commençons par revoir en détail ce qu'il se passe sur un plateau 2 par 2. On peut représenter tous les déroulements possibles d'une partie sur un arbre (voir le dessin). On a entouré en noir toutes les configurations représentant des fins de partie où Noémie gagne, et en bleu celles où Bertrand gagne. À chaque instant de la partie, on veut savoir si c'est Noémie ou Bertrand qui est en bonne position pour gagner.

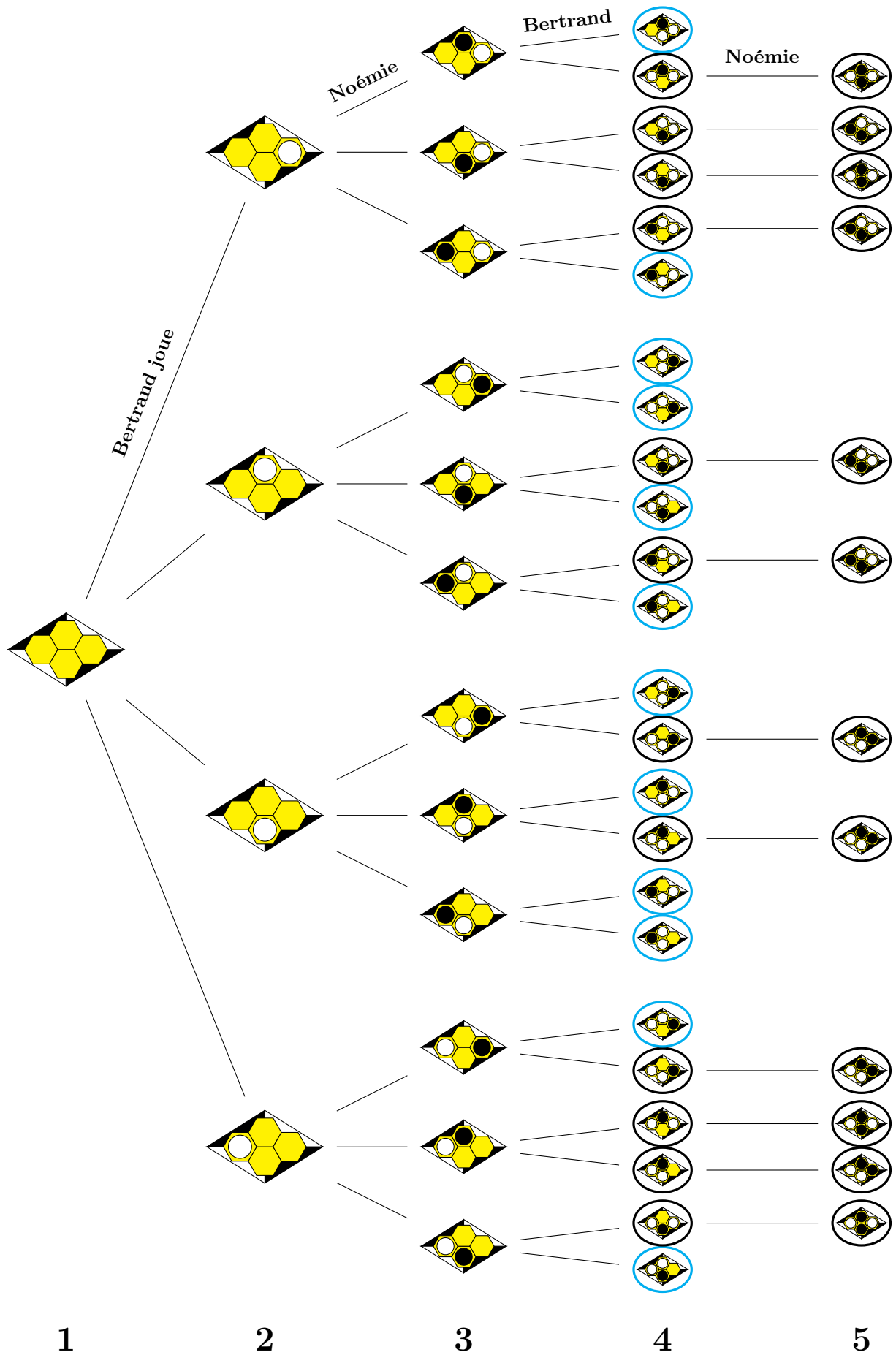
a) Sur cet arbre, pouvez-vous entourer en bleu toutes les configurations du plateau à partir desquelles Bertrand a une stratégie gagnante, et en noir celles pour lesquelles Noémie en a une ?

b) Finalement, quel joueur a une stratégie gagnante au début de cette partie ?

c) Expliquer pourquoi, quelle que soit la taille du plateau, un des deux joueurs a toujours une stratégie gagnante.

d) Peut-on appliquer cet argument aux échecs ?

Toutes les parties possibles sur un plateau 2 par 2





4) Qui est avantagé ?

John Nash a démontré que c'est toujours le premier joueur qui possède une stratégie gagnante. Son argument est le suivant : si Noémie avait une stratégie gagnante, alors Bertrand pourrait la lui "voler" ; il aurait alors, lui aussi, une stratégie gagnante : contradiction !

a) Pouvez-vous expliquer comment Bertrand volerait la stratégie de Noémie ?

b) Comment Bertrand peut-il utiliser l'argument de John Nash, en pratique, pour gagner la partie ?