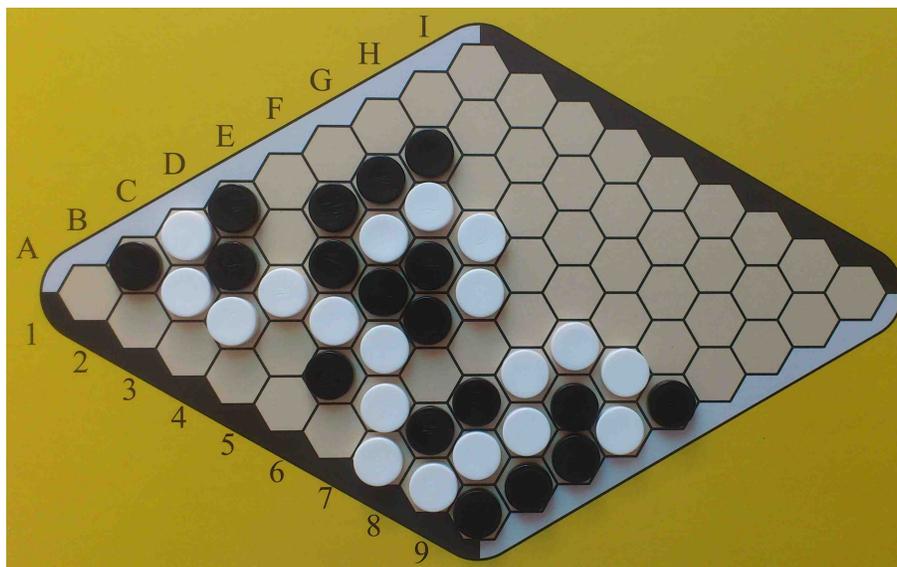




# Jeu de Hex

Noémie et Bertrand ont décidé d'essayer le jeu de Hex. Ils ont devant eux un plateau en forme de losange, qui est pavé par de petits hexagones. Deux côtés opposés du plateau sont blancs, les deux autres sont noirs. Chaque joueur, à tour de rôle, va poser un pion de sa couleur sur le plateau - noir pour Noémie, blanc pour Bertrand. Le premier joueur qui réussit à relier les deux côtés du losange ayant sa couleur par un chemin de pions de sa couleur a gagné. Bertrand commence la partie.

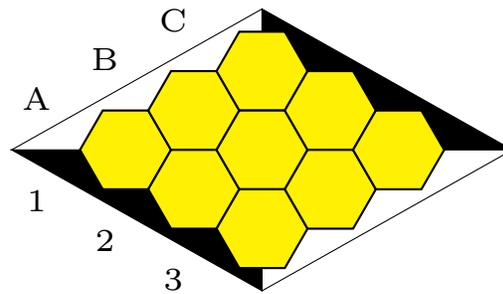
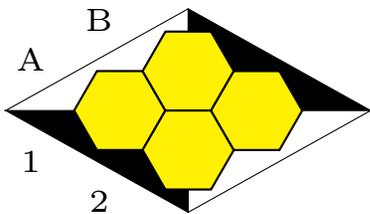
Qui va gagner ?...





# 1) Petits plateaux

Noémie et Bertrand choisissent d'abord de s'échauffer sur des plateaux de petite taille, 2 sur 2 et 3 sur 3.



a) A votre avis, qui va gagner ? Faites quelques essais...

b) Où Bertrand a-t-il intérêt à poser son premier pion ?

On dit qu'un joueur a une *stratégie gagnante* si, quelle que soit la façon dont son adversaire joue, il peut adapter ses coups pour être sûr de gagner.

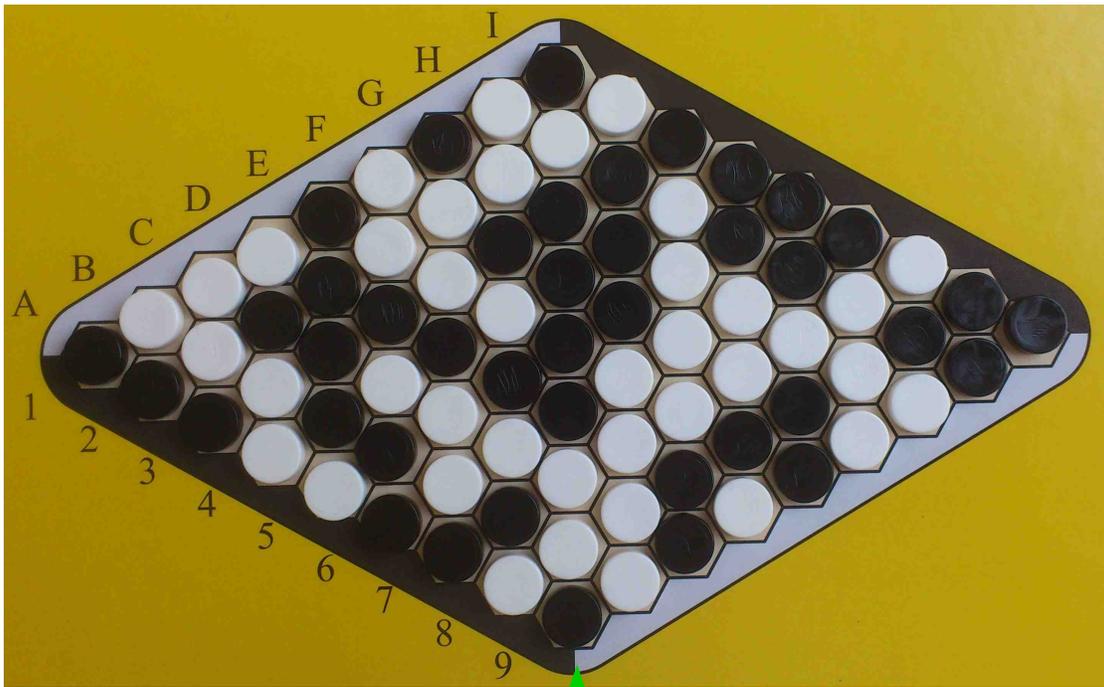
c) Est-ce que l'un des joueurs a une stratégie gagnante ?



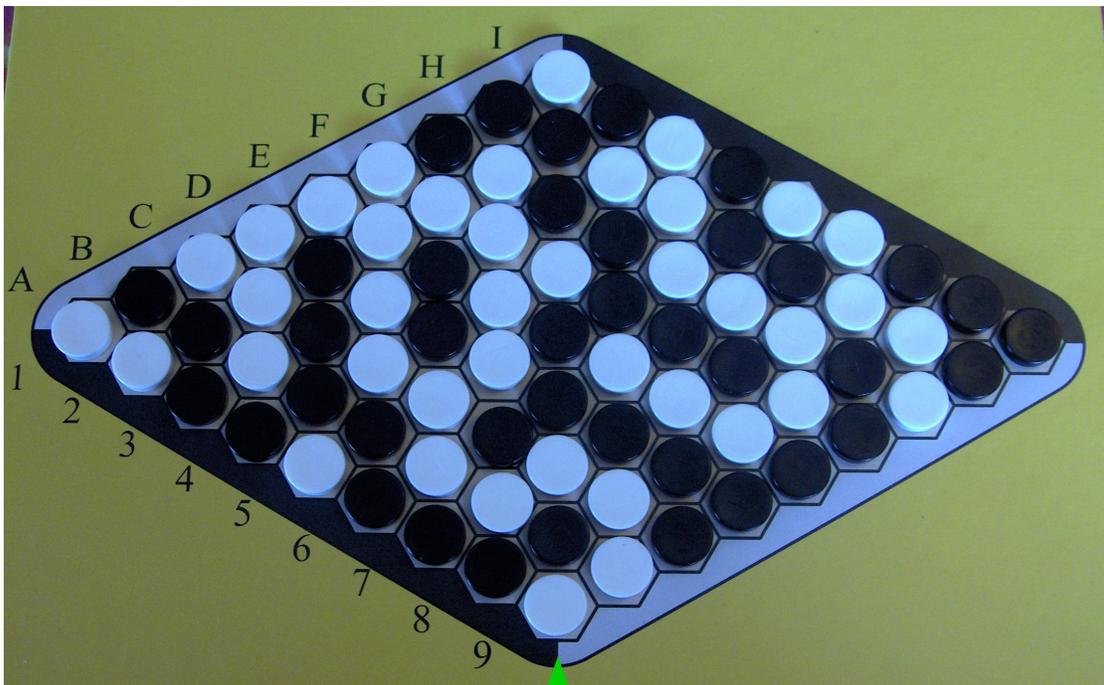


## 2) Les robots s'en mêlent (suite)

- a) Quel est le trajet décrit par le robot sur les deux plateaux de jeu représentés ? Qui a gagné la partie ? Où voit-on un chemin gagnant ?
- b) Par où le robot peut-il sortir du plateau de jeu ?
- c) Bertrand pense que le jeu peut se terminer par une partie nulle, mais Noémie pense que ce n'est pas possible. Qui a raison ?



robot



robot



### 3) Existence d'une stratégie gagnante

On veut comprendre le déroulement de parties sur de grands plateaux, mais pour y voir plus clair on va d'abord revoir en détail ce qu'il se passe sur un plateau 2 par 2.

On peut représenter tous les déroulements possibles d'une partie sur un arbre (voir le dessin). On a entouré en noir toutes les configurations représentant des fins de partie où Noémie gagne, et en bleu celles où Bertrand gagne.

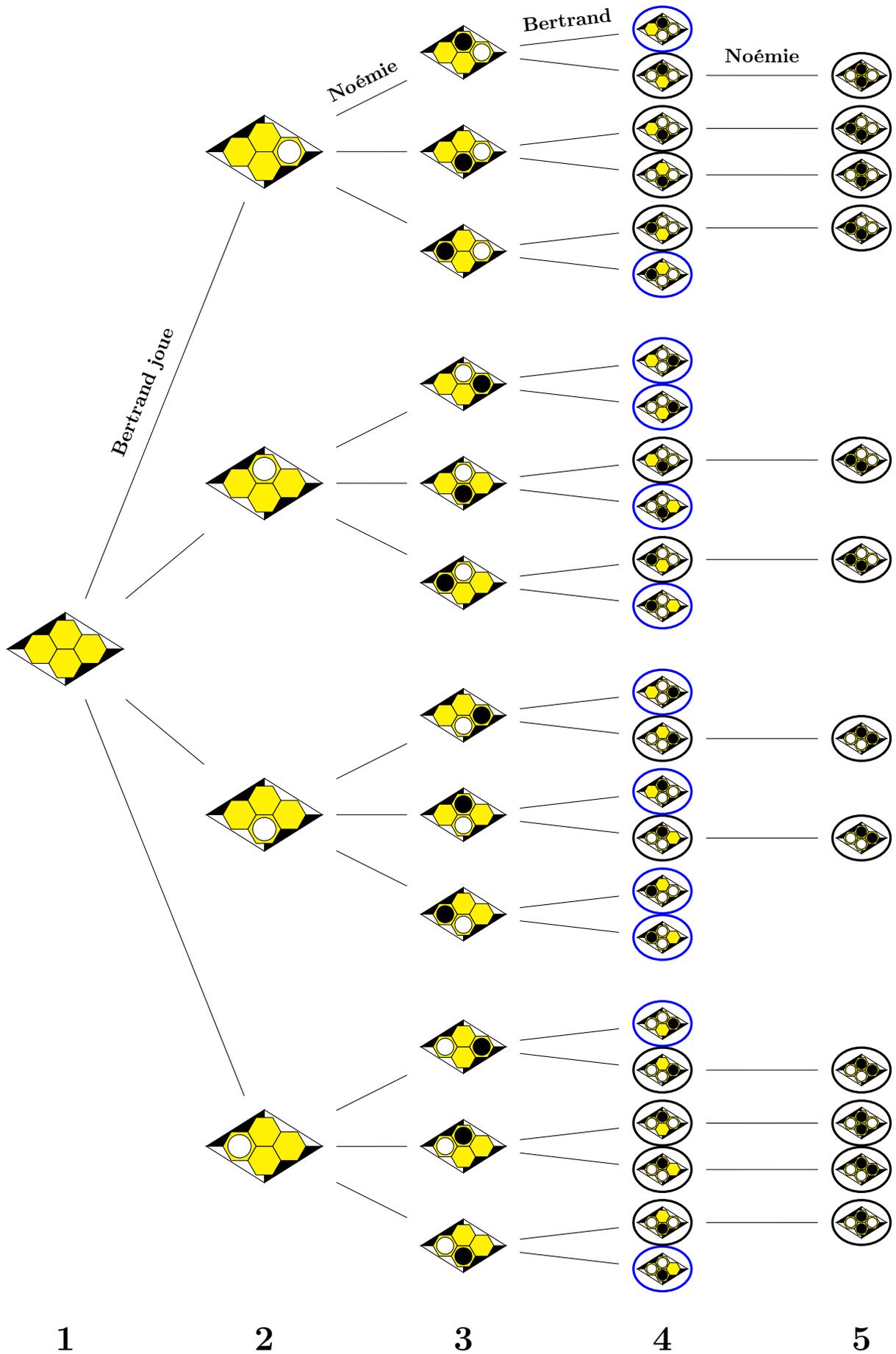
A chaque instant de la partie, on veut savoir si c'est Noémie ou Bertrand qui est en bonne position pour gagner. On va donc entourer les configurations étape par étape en commençant par la droite.



### 3) Existence d'une stratégie gagnante (suite)

- a) Au troisième coup c'est à Bertrand de jouer, il peut donc choisir le coup le plus favorable pour lui. Pouvez-vous entourer les configurations de la 3ème colonne
- en bleu si au moins un des choix de Bertrand mène à une configuration déjà entourée en bleu,
  - en noir sinon ?
- b) Au deuxième coup, c'est à Noémie de jouer. De même, pouvez-vous entourer les configurations de la 2ème colonne
- en noir si Noémie peut gagner,
  - en bleu sinon ?
- c) En suivant ces mêmes règles, pouvez-vous entourer en noir ou bleu la configuration de la 1ère colonne ?
- d) Quel joueur a une stratégie gagnante dans cette partie ? Comment le voyez-vous sur l'arbre ?
- e) Expliquer pourquoi, quelle que soit la taille du plateau, un des deux joueurs a toujours une stratégie gagnante.

# Toutes les parties possibles sur un plateau 2 par 2 :





## 4) Qui est avantagé ?

John Nash a montré par un argument abstrait que c'est toujours Bertrand, le premier joueur, qui a une stratégie gagnante quelle que soit la taille du plateau de jeu.

Néanmoins son argument ne nous donne aucune description de cette stratégie gagnante ! Sur des petits plateaux, on a vu qu'on peut décrire cette stratégie explicitement. Ca reste vrai pour des plateaux un peu plus grands (4 par 4, 5 par 5...), avec un peu plus d'efforts. Mais lorsque la taille du plateau est supérieure à 9 par 9, on ne connaît presque rien de cette stratégie gagnante...

Bertrand n'a donc concrètement aucun moyen de s'assurer la victoire !