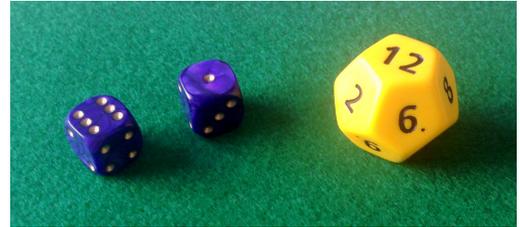
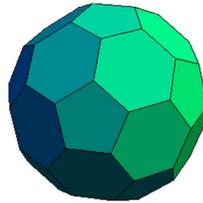




Probabilités et football



À la découverte des probabilités

- ☐ On joue avec deux dés à 6 faces. Essayez de trouver intuitivement quelle est la probabilité :
- d'obtenir un ☐ avec un dé à 6 faces ?
 - de ne pas obtenir un ☐ avec un dé à 6 faces ?
 - d'obtenir ☐☐ en lançant deux dés à 6 faces ?
 - d'obtenir un total de 5 en lançant deux dés à 6 faces ?
 - d'obtenir un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?
- ☐ On joue maintenant avec un dé à 12 faces. Intuitivement quelle est la probabilité d'obtenir un 2 ?

☒ Si on lance un certain nombre de fois les deux dés à 6 faces, en notant la somme des 2 dés, puis qu'on lance le même nombre de fois le dé à 12 faces, pensez-vous que les différents résultats possibles apparaissent à peu près le même nombre de fois ?

☒ Vous allez maintenant lancer ces trois dés.

- Notez dans le tableau 1 les résultats obtenus pour la somme des deux dés à 6 faces et pour le dé à 12 faces. Répétez l'expérience jusqu'à ce que le tableau soit rempli.
- Comptez le nombre de fois où apparaît chacun des nombres 1, 2, ... 12, pour le dé à 12 faces d'une part et pour la somme des résultats des dés à 6 faces d'autre part, et complétez le tableau 2.
- Si vous divisez le nombre de fois où vous avez obtenu un résultat par le nombre de lancers de dés effectués, vous obtenez la fréquence de ce résultat. Calculez les fréquences pour les résultats du tableau précédent et complétez le tableau 3.

☒ Utilisez le tableau des fréquences (tableau 3) pour répondre aux questions suivantes, et comparez vos réponses avec celles données intuitivement au début. Quelle est la fréquence d'apparition :

- du résultat 2 avec un dé à 12 faces ?
- de $\square\square$ en lançant deux dés à 6 faces ?
- d'un total de 5 avec deux dés à 6 faces ?
- d'un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?

Les fréquences des différents résultats sur la somme de deux dés à 6 faces et sur le dé à 12 faces sont-elles les mêmes ?

☒ Les fréquences de buts marqués par rapport au nombre de tirs des équipes de Ligue 1 lors de la saison 2014/2015 sont données dans le tableau 4. On peut imaginer que les lancers de dés représentent les tirs d'une équipe, et qu'obtenir un nombre particulier, par exemple le 1, signifie que l'équipe marque un but. Si vous avez le choix entre des dés avec 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 et 20 faces, complétez le tableau 4 en rajoutant le nombre de faces du dé que vous utiliseriez pour modéliser les tirs !



Le paradoxe des anniversaires

Parfois, on peut avoir une bonne intuition à propos des probabilités des événements. Mais attention, il existe plein de résultats qui ne sont pas du tout intuitifs ! L'un d'entre eux concerne le "paradoxe des anniversaires".

☐ À votre avis, sans aucun calcul, combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que la vôtre ?

S'il y a 30 personnes, pensez-vous qu'il est probable que quelqu'un partage votre date d'anniversaire ?

☐ À votre avis, toujours sans calculs, combien de personnes doivent être réunies pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?

Si 30 personnes sont réunies, pensez-vous qu'il soit probable qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?

☐ Vous avez à votre disposition les tables des dates de naissance des joueurs de la coupe du monde de football 2014. Dans chaque équipe, il y a 30 joueurs.

- Dans combien d'équipes y a-t-il un joueur ayant la même

date d'anniversaire que vous ?

- Pouvez-vous en déduire une estimation de la probabilité que quelqu'un partage votre date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?

☒ Reprenez les tables des dates de naissance des joueurs.

- Dans combien d'équipes y a-t-il au moins 2 joueurs ayant la même date d'anniversaire ?
- Pouvez-vous en déduire une estimation de la probabilité qu'au moins deux personnes partagent la même date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?

Ces estimations sont-elles proches de vos prévisions ?

☒ Question bonus (y réfléchir chez vous !) :

Le tableau ci-dessous donne les probabilités correspondant à des groupes de différentes tailles. En regardant les valeurs des probabilités pour des petits groupes (de 2 à 5 personnes), et en utilisant les réponses des questions précédentes, essayez de trouver comment ces probabilités ont été calculées !

| Nombre de personnes dans le groupe | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 23 | 50 |
|--|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| Chance que quelqu'un ait votre date d'anniversaire | 0,5 % | 0,8 % | 1,1 % | 1,4 % | 2,7 % | 5,3 % | 6,1 % | 12,8 % |
| Chance que 2 personnes aient la même date d'anniversaire | 0,3 % | 0,8 % | 1,6 % | 2,7 % | 11,7 % | 41,1 % | 50,7 % | 97 % |

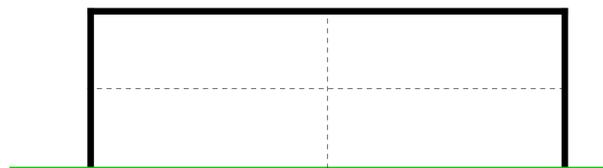


Tirs au but : une introduction à la modélisation mathématique

Le tableau suivant indique le nombre de tirs au but durant les trois dernières années de la Ligue 1 (en France) et des trois dernières finales de Coupe du monde, et le calcul des fréquences correspondantes !

| | Ligue 1 14/15 | Ligue 1 13/14 | Ligue 1 12/13 | WC2014 | WC2010 | WC2006 |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|--------|--------|--------|
| Tirs au but tentés | 126 | 79 | 71 | 36 | 32 | 26 |
| Tirs au but réussis | 103 | 66 | 64 | 26 | 23 | 38 |
| Fréquence (en %) | 81,75% | 83,54% | 90,14% | 72,22% | 71,88% | 68,42% |

En fait, dans la plupart des ligues et championnats de football, environ 70 % à 80 % de tirs au but se transforment en buts. Essayons, par une modélisation probabiliste simple, de retrouver l'ordre de grandeur de ces chiffres.



□ Imaginez le scénario suivant : la cage est divisée en 4 zones, et le gardien arrête le tir s'il devine dans quelle partie de la cage le tireur envoie le ballon - sinon, le tir au but est réussi et le but est marqué !

- Quelle est la probabilité que le gardien devine où il doit se placer pour arrêter le tir ?

- Quelle est la probabilité de marquer un but dans ce scénario simple ?
- Les hypothèses de ce scénario sont-elles réalistes ? Que manque-t-il ?

☐ D'après vous, du point de vue du gardien, en combien de zones est-il raisonnable de considérer que la cage est divisée ? Le symbole ⚽ va représenter ce nombre.

Devant vous se trouvent des perles en plastique de deux couleurs. Prenez ⚽-1 perles de **couleur 1** et 1 perle de **couleur 2** et mettez-les dans la première boîte. La perle de **couleur 2** représente le gardien arrêtant le but.

Si vous fermez les yeux et que vous choisissez une perle dans la boîte, quelle est la probabilité de tirer une perle de **couleur 1** ?

☐ En plus du gardien arrêtant le ballon, pour quelle autre raison un tir au but peut ne pas être marqué ? Pensez à Zlatan Ibrahimović ou à David Trézéguet...

Évidemment, chez les professionnels, il est peu probable qu'un joueur manque la cage. Choisissez un pourcentage dans le tableau ci-dessous et prenez le nombre de perles correspondant. Mettez-les dans la deuxième boîte. Les perles de **couleur 2** représentent les loupés.

| Pourcentage de tirs loupés | 2 % | 4 % | 5 % | 6 % | 8 % | 10 % |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| Nombre de perles de couleur 1 | 49 | 24 | 19 | 47 | 23 | 9 |
| Nombre de perles de couleur 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 1 |

☒ Maintenant, fermez les yeux et tirez une perle dans la "boîte du tireur". Si la perle tirée est de **couleur 2**, le tireur a loupé la cage et le but n'est pas marqué. Sinon, tirez une perle dans la "boîte du gardien". Si celle-ci est de **couleur 1**, cela correspond dans notre modèle à un but marqué ; si elle est de **couleur 2**, cela correspond à un but loupé. Notez le résultat du tirage dans le tableau 6, remettez les perles dans leurs boîtes de départ et recommencez l'expérience 30 fois.

- Quel est le nombre de "buts marqués" sur ces 30 essais ?
- Quelle est la fréquence des tirs au but transformés dans notre modèle ? Comparez ce nombre aux pourcentages annoncés au début !

☒ Si la probabilité que le gardien fasse le mauvais choix est p et que la probabilité que le tireur ne manque pas la cage est q , quelle est la probabilité que le but soit marqué ? Vous pouvez utiliser la fréquence obtenue à la question ☒ ci-dessus pour trouver la réponse à cette question.



Cotes et coefficients de paris

Il existe différentes sortes de paris sportifs sur le football. Quand on parie, un nombre appelé coefficient dit quelle sera la somme gagnée si le pari est remporté. Dans la mesure où les résultats des matchs ne sont pas connus à l'avance, les coefficients sont calculés à l'aide des probabilités. Nous allons voir quels sont les liens entre probabilités, cotes et coefficients.

□ Imaginez que vous pariez sur le résultat d'un lancer de pièce avec quelqu'un, vous pariez sur "face" et votre adversaire parie sur "pile".

- Quelle est la probabilité que vous remportiez le pari ? Et votre adversaire ?
- Combien y a-t-il de résultats possibles à ce pari ?

On dit que votre *cote* dans ce jeu est donnée par le rapport

$$\frac{\text{nombre de résultats possibles en votre faveur}}{\text{nombre de résultats possibles en votre défaveur}}$$

- Quelle est votre cote dans ce jeu ?
- Si vous pariez une somme ☺ sur un lancer de pièce, et que le gagnant remporte les 2 mises, quelle somme votre

adversaire doit parier pour que le jeu soit équitable ?
Exactement ☺, plus que ☺ ou moins que ☺ ?

- Dans le cas où $\text{☺}=1$, quelle somme récupérez-vous si vous gagnez le pari (en comptant votre mise et celle de l'adversaire) ? Et si vous misez une somme ☺ quelconque ?

On appelle *coefficient* de votre pari le nombre c tel que vous récupérez c fois votre mise lorsque vous gagnez.

- Quel est le lien entre la probabilité que vous remportiez le pari et votre coefficient de pari ?

On admet que cette relation reste vraie si la probabilité que vous gagniez est p et non plus $1/2$. Dans la suite, on va vérifier cette relation à partir des fréquences.

☐ Dans la dernière saison de Ligue 1, 88 des 380 matchs se sont terminés par un nul, soit 23%. L'année précédente, c'était 107 matchs sur 380, soit 28%. Ces chiffres ne sont pas inhabituels : en football professionnel, environ 20 à 30% des matchs se finissent sur un nul. Imaginez qu'on vous propose de parier qu'un match se finisse sur un nul, mais vous ne savez pas quelles sont les équipes qui jouent ce match. On modélise le problème en fixant à 25% votre probabilité de gagner votre pari, ce qui semble raisonnable.

- Quelle est la cote correspondante ?
- Quel est le coefficient (pour un jeu équitable) correspondant ? On le notera .

☐ Les sites de paris proposent en principe des coefficients plus bas que si le jeu était équitable, de façon à gagner de l'argent. Nous allons utiliser un dé à 12 faces pour tester ce qu'on gagne ou perd si on prend un coefficient égal à  et si on prend un coefficient égal -0,4.

Sur les 12 résultats possibles du dé, les résultats de 1 à 3 vont représenter des matchs se finissant sur un nul.

- Lancez le dé à 12 faces 30 fois et notez les résultats obtenus dans le tableau 7.
- Combien de "matchs nuls" avez-vous obtenus ?
- Si vous aviez parié la somme 1 sur chaque match, combien auriez-vous gagné ou perdu avec le coefficient de pari  ? Et avec le coefficient -0,4 ?



Tableau 4

| Equipe | Buts | Tirs | Fréquence | Meilleur dé |
|---------------------|------|------|-----------|-------------|
| Paris SG (M,L) | 83 | 491 | 16,90% | |
| Olympique Lyon | 72 | 524 | 13,74% | |
| Olympique Marseille | 76 | 579 | 13,13% | |
| FC Evian T. G. | 41 | 334 | 12,28% | |
| SM Caen (N) | 54 | 462 | 11,69% | |
| HSC Montpellier | 46 | 396 | 11,62% | |
| SC Bastia | 37 | 320 | 11,56% | |
| AS Saint-Etienne | 51 | 443 | 11,51% | |
| EA Guingamp (P) | 41 | 359 | 11,42% | |
| AS Monaco | 51 | 452 | 11,28% | |
| Stade Reims | 47 | 441 | 10,66% | |
| OGC Nizza | 44 | 418 | 10,53% | |
| FC Toulouse | 43 | 431 | 9,98% | |
| Girondins Bordeaux | 47 | 488 | 9,63% | |
| Stade Rennes | 35 | 365 | 9,59% | |
| OSC Lille | 43 | 463 | 9,29% | |
| FC Lorient | 44 | 486 | 9,05% | |
| RC Lens (N) | 32 | 411 | 7,79% | |
| FC Metz (N) | 31 | 450 | 6,89% | |
| FC Nantes | 29 | 424 | 6,84% | |

Données issues de <http://www.squawka.com/football-team-rankings>

Tableau 5

| Fraction | Valeur exacte | Valeur approchée |
|----------|---------------|------------------|
| 1/4 | 0,25 | |
| 1/6 | | 0,1667 |
| 1/8 | 0,125 | |
| 1/10 | 0,1 | |
| 1/12 | | 0,0833 |
| 1/14 | | 0,0714 |
| 1/16 | 0,0625 | |
| 1/18 | | 0,0556 |
| 1/20 | 0,05 | |

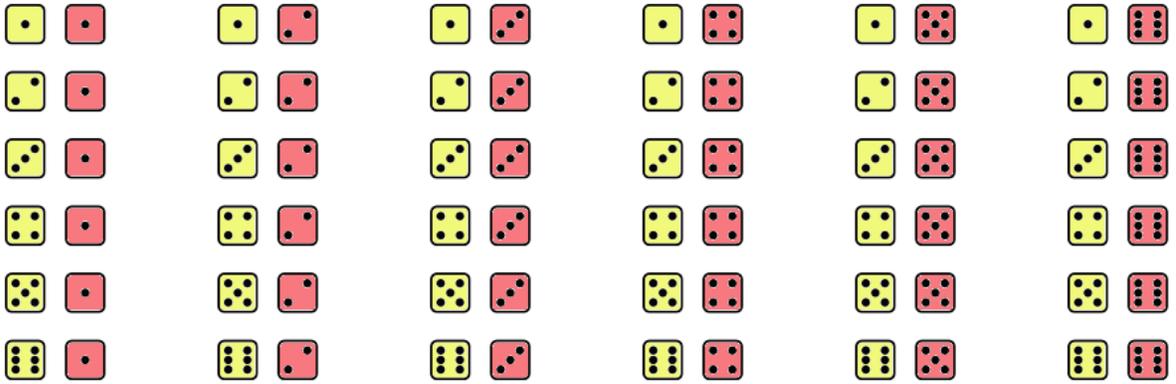
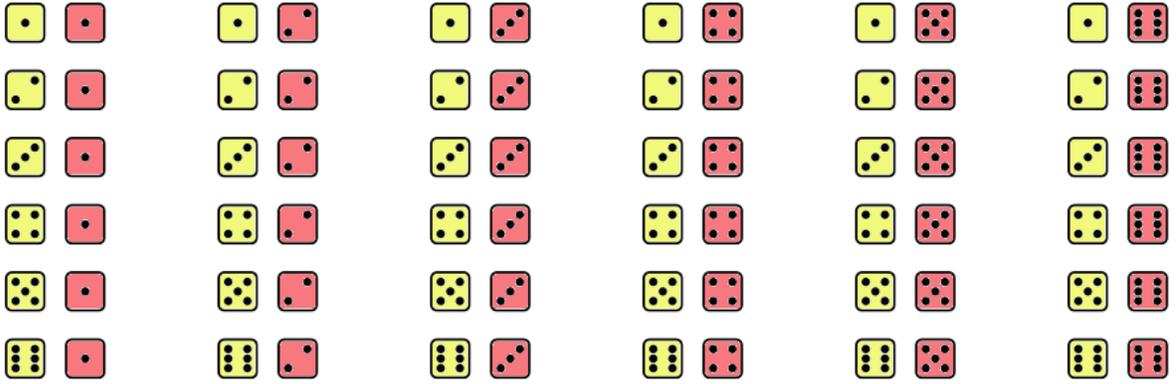


Table de valeurs approchées

| n | Valeur approchée de $n/30$ | Valeur approchée de $n/36$ | Valeur approchée de $n/12$ |
|-----|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1 | 0,03 | 0,03 | 0,08 |
| 2 | 0,07 | 0,06 | 0,17 |
| 3 | 0,10 | 0,08 | 0,25 |
| 4 | 0,13 | 0,11 | 0,33 |
| 5 | 0,17 | 0,14 | 0,42 |
| 6 | 0,20 | 0,17 | 0,50 |
| 7 | 0,23 | 0,19 | 0,58 |
| 8 | 0,27 | 0,22 | 0,67 |
| 9 | 0,30 | 0,25 | 0,75 |
| 10 | 0,33 | 0,28 | 0,83 |
| 11 | 0,37 | 0,31 | 0,92 |
| 12 | 0,40 | 0,33 | 1 |
| 13 | 0,43 | 0,36 | |
| 14 | 0,47 | 0,39 | |
| 15 | 0,50 | 0,42 | |
| 16 | 0,53 | 0,44 | |
| 17 | 0,57 | 0,47 | |
| 18 | 0,60 | 0,50 | |