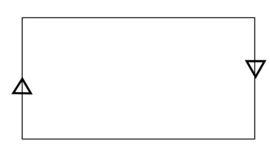
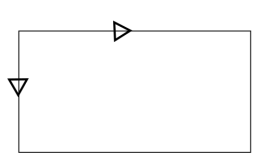
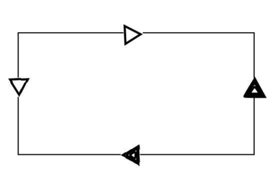
Ruban de Möbius

et autres surfaces

On se demande quels objets géométriques distincts on peut obtenir en recollant deux à deux les côtés d'un rectangle. On dira que deux objets géométriques sont les mêmes si l'on peut les déformer l'un vers l'autre, sans les couper, les casser ou les recoller. Par exemple, un cercle, un triangle et un carré sont les mêmes de ce point de vue (cela s'appelle la topologie).
On peut recoller deux côtés, ou bien les quatre. Voici des exemples, on peut utiliser les bandes de papier et le scotch !
On recolle les côtés des bandes de façon à ce que les triangles de même couleur soient recollés l'un sur l'autre (attention au sens).







Ces objets sont des objets bien connus, qui figurent parmi ceux listés dans le tableau page suivante, mais pour le deuxième et le troisième il faut imaginer qu'on a un peu déformé la représentation « classique » qu'on s'en fait.

Donnez toutes les possibilités distinctes de tels recollements. Attention, tous les recollements ne peuvent pas être réalisés, c'est expliqué au cours du parcours orange.

On se propose de trouver des propriétés propres à ces objets, qui nous permettront de les classifier complètement, par exemple de justifier que les trois ci-dessus sont différents. Le mathématicien considère que deux objets sont les mêmes si on peut les déformer l'un vers l'autre, sans les couper ou les recoller.

D'abord, observons que la bande de Möbius n'a pas « d'intérieur » ni « d'extérieur » : si une petite fourmi marche le long de la bande, elle reviendra à son point de départ la tête en bas. On dit que la bande de Möbius n'est pas orientable.

Ensuite, on remarque que si l'on recolle seulement deux côtés, il reste ce que l'on appelle un « bord », alors qu'il n'y en a pas lorsque l'on recolle tous les côtés.

Enfin, on peut compter le nombre de sommets - le nombre d'arêtes + 1. Ce nombre s'appelle la caractéristique d'Euler χ, et c'est un théorème mathématique très joli qui affirme que deux objets qui n'ont pas la même caractéristique d'Euler ne peuvent pas être déformés l'un sur l'autre.

Au travail ! Voici un tableau à remplir :

Surface :	Disque	Anneau	Sphère	Möbius	Tore	Klein	Proj
Orientable	**oui**						
Bord	**1**						
χ	**1**						

L'exemple du disque : lorsque l'on fait le recollement comme sur la deuxième figure de la page précédente, on obtient comme un cornet, que l'on peut voir comme un disque déformé. La face du rectangle qui était devant nous est à l'intérieur du cornet, et l'autre est à l'extérieur, on peut donc affirmer que le disque est orientable. Ensuite, le haut du cornet (là où on poserait une boule de glace) est son bord, et il est en un seul morceau. Enfin, après recollement on a 3 sommets (rouge, vert et bleu sur le dessin ci-dessous), et 3 arêtes (idem), donc $\chi = 3 - 3 + 1 = 1$**.**