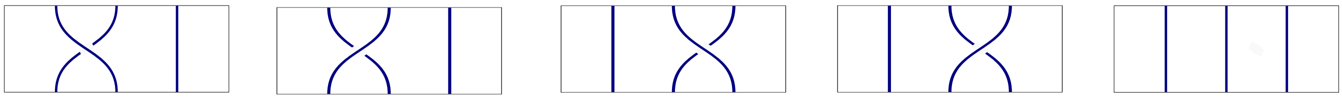
Les maths en des tresses
Fiche animateur

Pour les notations des cartes tresses, on utilise celles introduites dans la fiche bleue :

a A b B e



On désignera par Ji (respectivement Oi, Bi) la i-ème question de la version jaune (respectivement orange, bleue).

J1 et 2, O1, B1 : La tresse en cordelette est aba. Cette tresse peu aussi s'écrire par exemple $aBbbaAa$, pour avoir en tête un exemple un peu idiot. Avec le même nombre de cartes, on peut l'écrire bab (c'est la célèbre "relation de tresse"). C'est assez facile à voir en utilisant la tresse en cordelettes : on peut tirer un peu sur les brins pour que tel croisement de brins ait lieu avant ou après tel autre.

J3 : La tresse dénouée est e. Les inverses des cartes sont : $a^{-1} = A, b^{-1} = B, e^{-1} = e$.

J4, O2, B2 : La tresse présentée est aba. Il y a deux solutions "optimales" , c'est à dire deux inverses avec le nombre minimal de cartes :

— ABA est un inverse. Cela répond aussi à la question suivante : la recette c'est de prendre la tresse donnée, et de mettre à la suite tous les inverses de chacune des cartes qui apparaissent, dans l'ordre inverse. Cela revient à multiplier la tresse par son image dans un miroir.

— BAB **est aussi un inverse, voir la relation de tresse** $aba = bab$ **donnée précédemment.**

J5, O3, B3 :

— **La première tresse est nouée : elle permute les points de départ et d'arrivée.**

— **La deuxième est également nouée, mais l'argument précédent ne marche plus. Pour prouver que cette tresse est nouée, on peut remarquer que le deuxième brin n'est enlacé avec aucun des deux autres, mais les brins 1 et 3 sont enlacés. Formellement, la tresse s'écrit** ab^2A**, c'est un élément conjugué à** b^2**, donc il "suffit" de voir que** b^2 **n'est pas trivial. Encore plus formellement, on peut définir un morphisme du groupe des tresses vers** $\mathbb{Z}$ **en associant à un mot en** a, b, a^{-1}, b^{-1} **le nombre total algébrique de lettres (la somme des exposants). Cette formule est bien définie sur le groupe des tresses, parce que les mots qui sont identifiés (comme** aba **et** bab**) ont le même nombre algébrique de lettres (ici 3). Ce morphisme vaut** 2 **pour la tresse** ab^2A**, ce qui montre qu'elle n'est pas triviale. L'interprétation géométrique de ce morphisme est qu'il compte le nombre d'enlacement total des pairs de brins (l'unité étant le demi-tour). La dernière tresse est dans le noyau de ce morphisme, ce qui rend le problème plus ardu...**

— **La troisième tresse est aussi nouée, mais ce n'est pas facile à montrer. Et c'est bien la seule réponse qui est attendue des participants : c'est une question difficile ! Pour ce convaincre que la tresse est effectivement nouée,**

on pourrait réaliser la tresse avec des vrais brins (il y a des plaquettes avec des brins à disposition sur le stand) et essayer de passer les doigts entre les brins comme pour les peigner. Néanmoins pour une tresse assez longue, on se rend compte que si on n'y arrive pas c'est peut être juste parce que les brins se sont un peu emmêlés les uns aux autres...

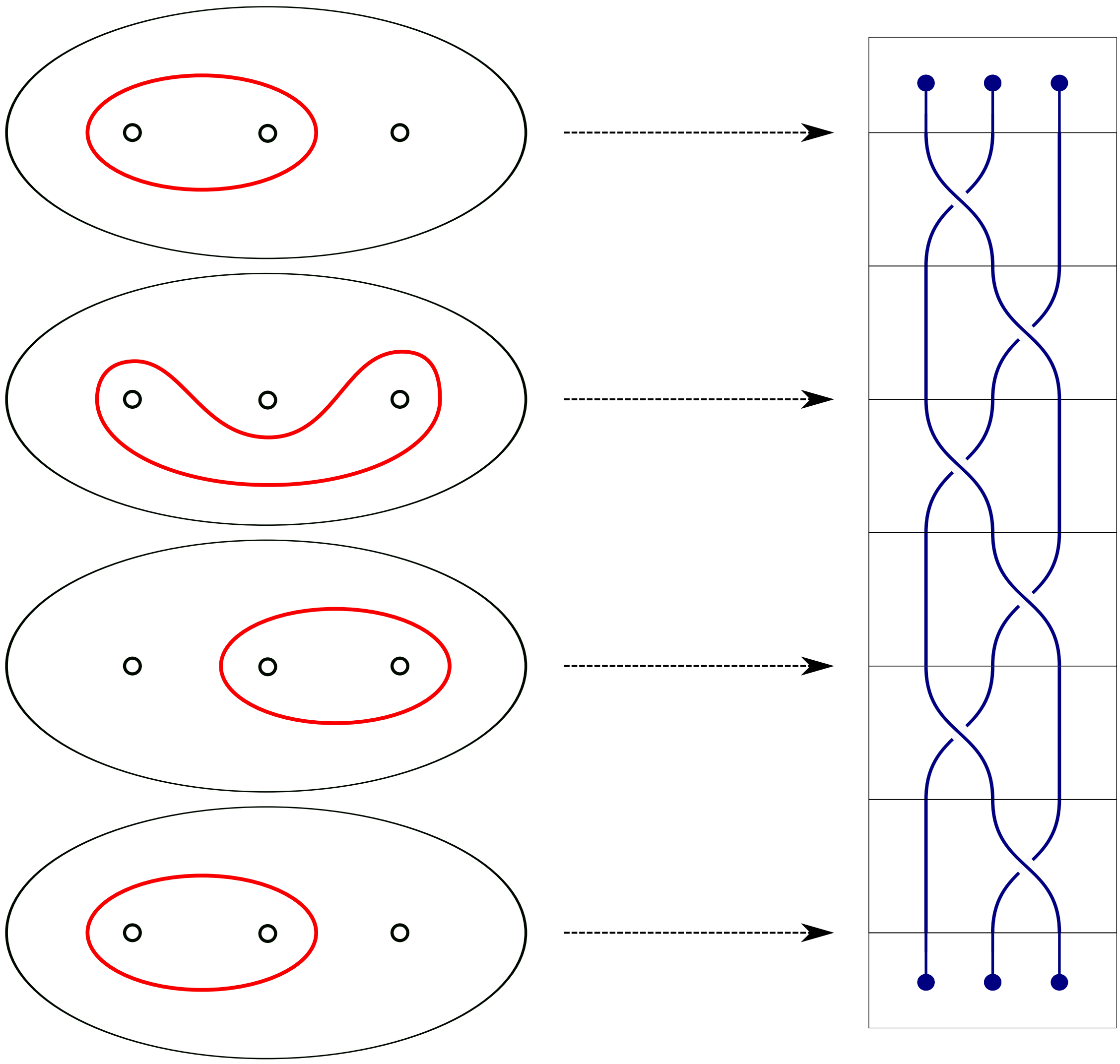
Pour satisfaire votre curiosité, voici quand même deux pistes de justifications. Un moyen de prouver à moitié que cette tresse est nouée est de remarquer que cette tresse est $a^3b^2A^2B^2A$ conjuguée à $a^2b^2A^2B^2$, qui est le commutateur de $[a^2, b^2]$. La tresse est donc triviale ssi a^2 et b^2 commutent. Si c'était le cas, on aurait un sous groupe abélien d'indice fini du groupe de tresses et cela n'existe pas, mais ça n'est pas évident !

Un autre moyen est d'admettre la propriété dynamique suivante : une tresse est triviale si elle agit trivialement sur "tous les élastiques" (en fait il y a équivalence). Ce qu'on veut dire par là, c'est que si on passe un élastique, disons autour des deux premiers brins, et qu'on le "suit" le long de la tresse (voir la question 4 des versions orange et bleue du stand), il doit ressortir comme il était si la tresse est triviale. On vous laisse vérifier ici que ce n'est pas le cas !

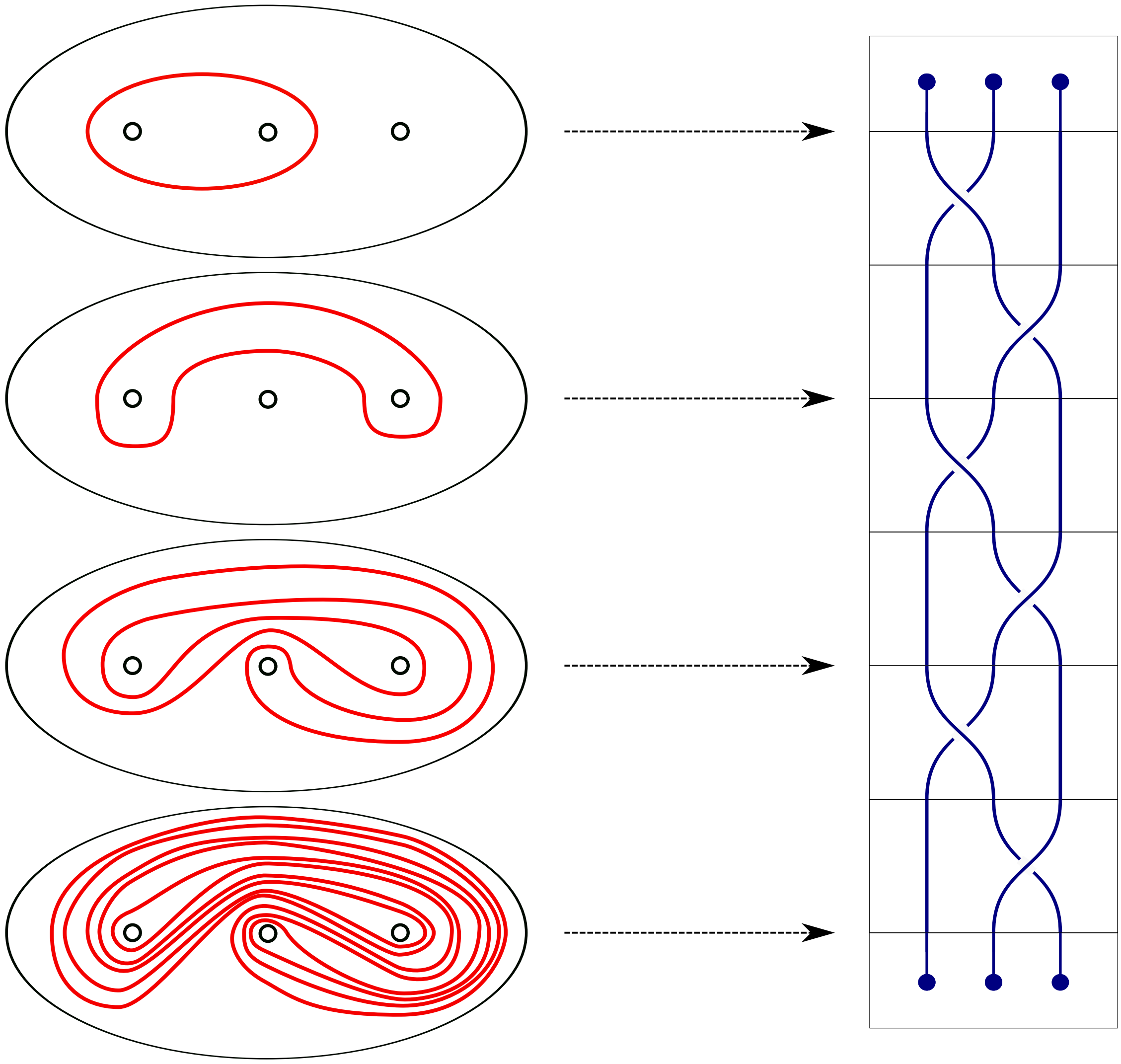
O4, B4 : Dans cette question, il faut avoir une vision "verticale" de la tresse : une tresse dans un bocal est présente sur le stand pour cela. Vous pouvez sortir la tresse de son bocal pour montrer aux participants avec un bout de fi-

celle à quel endroit l'élastique serait positionné en haut de la tresse.
Il n'est pas toujours facile d'arriver à se représenter de tête la déformation de l'élastique. On pourra suggérer aux participants de dessiner l'élastique après mouvement élémentaire de la carte si ça les aide, et/ou de représenter directement l'élastique sur le dessin de la tresse à droite de la feuille de réponse.
Il est également possible de faire la manipulation suivante. Des plaques métalliques sont fournis sur le stand, avec des aimants et des ficelles. Les aimants représentent les brins vus du dessus. Trois croix apparaissent sur chaque plaque métallique, correspondant aux positions canoniques des trois brins vus du dessus. On peut "tresser" ces brins en déplaçant les aimants à la surface de la plaque. Les ficelles représentent les élastiques. Pour la première tresse présentée, utiliser les petites ficelles jaunes. On constate que la longueur de la ficelle jaune suffit, le mouvement de tressage qu'on effectue sur les brins déforme très peu l'"élastique" que représente la ficelle. Pour le deuxième tressage, il est vite évident quand on fait un essai que la ficelle jaune est trop courte. Prendre alors la très longue ficelle rouge, et commencer à tresser. On peut s'arrêter après chaque mouvement de tressage pour répartir la longueur de la ficelle plus uniformément autour des aimants, et dessiner sur sa feuille la position de l'"élastique". Il faut toute la longueur de la ficelle rouge pour venir au bout des 3 itérations de la tresse. Peu importe si les participants

n'obtiennent pas le dessin précis représentant la position de l'élastique au bout de ces 3 itérations, le but est qu'ils soient convaincu que l'élastique s'est alors considérablement allongé.
Voilà ce qu'on obtient pour la première tresse.



Et pour la deuxième, un peu plus compliqué...



B5 : La tresse triviale e **commute avec tout le monde. Sinon, parmi les 4 autres cartes, chacune commute avec elle-même et avec son inverse, et c'est tout ! Pour montrer par exemple que** $ab \neq ba$**, on peut se servir du fait qu'elles n'induisent pas la même permutation sur leurs extrémités.**

B6 : Pour développer l'indice, imaginer qu'on prend la tresse triviale en cordelette, et qu'on fait faire une rotation de 360 degrés au plan où sont fixées les extrémités inférieures. La tresse obtenue est alors non triviale (les brins sont enlacés), c'est la tresse $ababab$**. Pourquoi commute-**

t-elle avec tout le monde ? On peut le vérifier à la main à coup de "relation de tresse" $aba = bab$, mais c'est fastidieux. On peut aussi s'imaginer n'importe quelle tresse placée au-dessus, qu'on ferait glisser le long des brins ; elle finirait en-dessous sans avoir changé !
Remarque : c'est essentiellement la seule tresse à avoir cette propriété, dans le sens où le centre du groupe de tresse est (librement) engendré par cette dernière, mais c'est autrement plus difficile...