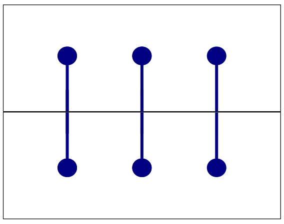
Les maths en des tresses

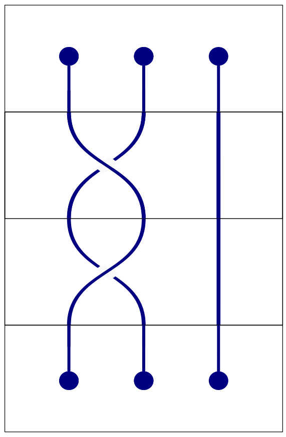
En tressant des brins de laines, on peut faire des bracelets. Nous vous invitons à découvrir comment les mathématiciens, en jouant avec cette idée de brins enlacés, ont inventé le *groupe des tresses*...

Nous allons jouer avec des cartes représentant des sortes de tresses. Sur chaque carte, on a dessiné trois brins, dont deux qui se croisent. En plaçant plusieurs cartes les unes sous les autres, on obtient des dessins de tresses de plus en plus compliquées. Ces dessins modélisent une tresse constituée de trois cordelettes souples qui sont attachées à leurs extrémités.

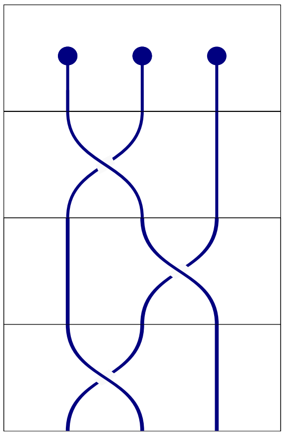
1. ***Observez la tresse en cordelettes et représentez-la avec des cartes, en essayant d'utiliser le moins de cartes possible.*** **Vous avez le droit de déplacer les brins si ça vous arrange (sans détacher les extrémités). Pouvez-vous trouver une deuxième succession de cartes qui représente la même tresse ?**

2. La tresse la moins intéressante est celle qui est dénouée. On peut la représenter de plusieurs façons, par exemple ainsi :





À la question précédente vous avez représenté une tresse qui, elle, est nouée. *Sauriez-vous la dénouer en lui ajoutant de nouvelles cartes ?*

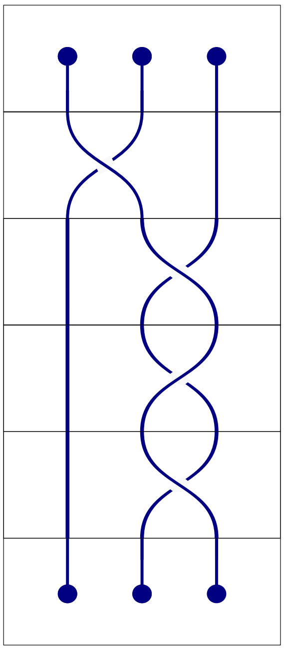


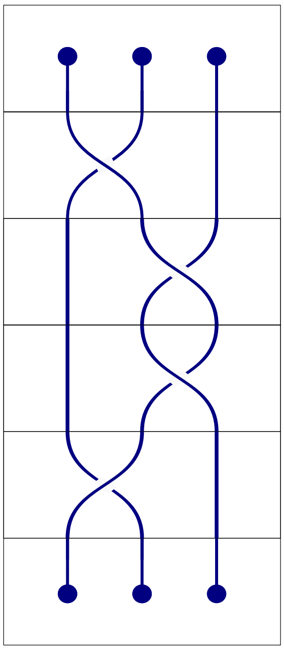
?

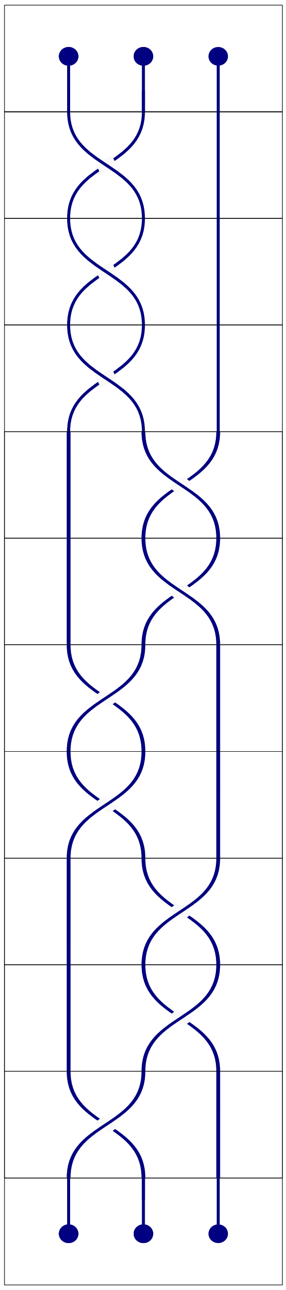
Sauriez-vous dénouer n'importe quelle tresse en lui ajoutant de nouvelles cartes ?

Lorsqu'on place deux tresses l'une sous l'autre, on obtient une nouvelle tresse ; cette opération s'appelle "multiplier des tresses". N'importe quelle tresse peut être dénouée en ajoutant des cartes, autrement dit en la "multipliant" par une autre tresse qu'on appelle son inverse (ou son miroir). Les mathématiciens résument ces propriétés en disant que les tresses forment un *groupe*.

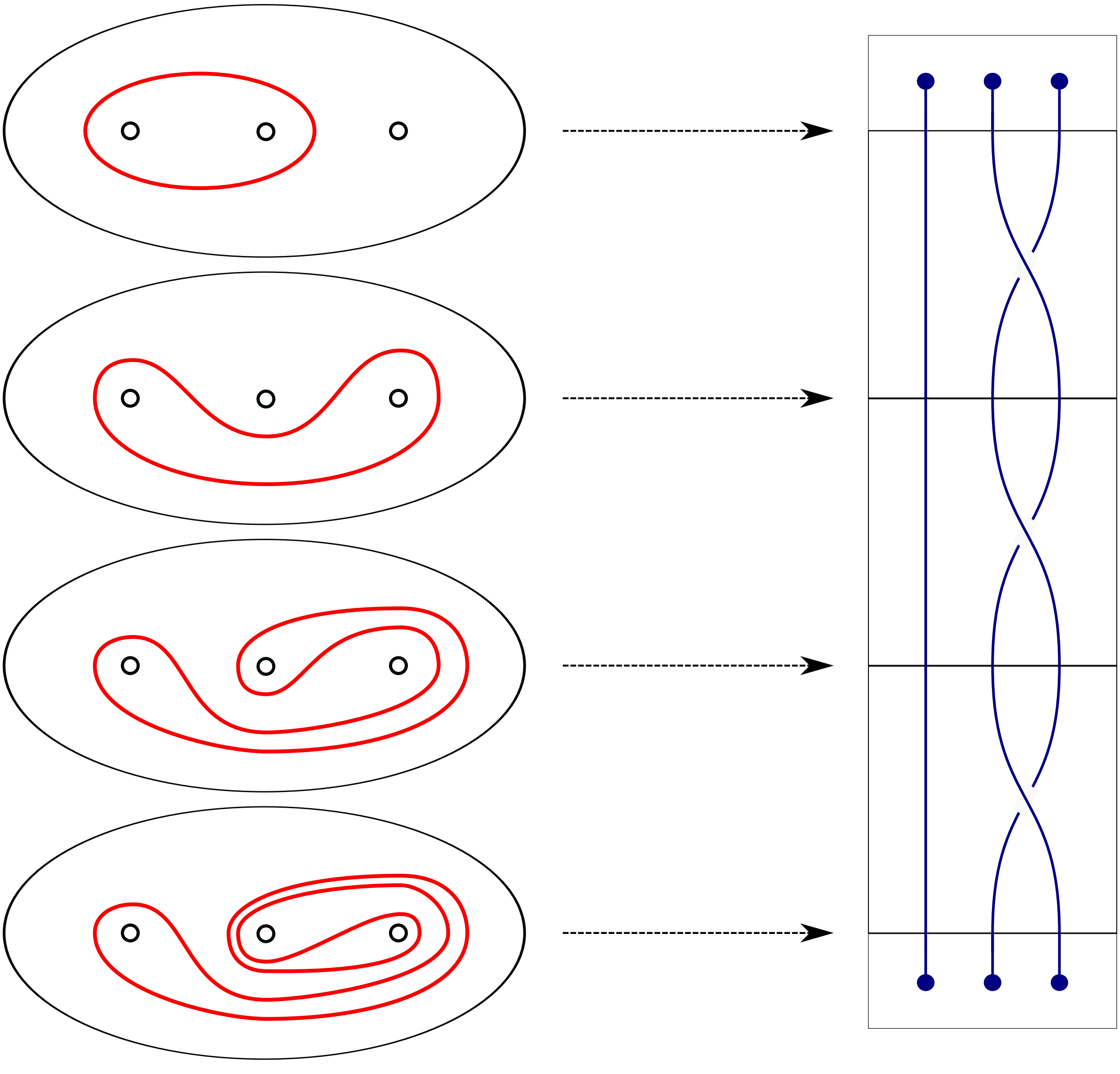
3. Un problème fondamental consiste à savoir reconnaitre une tresse dénouée. ***Les tresses suivantes sont-elles nouées ou dénouées ? Pouvez-vous donner un argument convaincant ?***



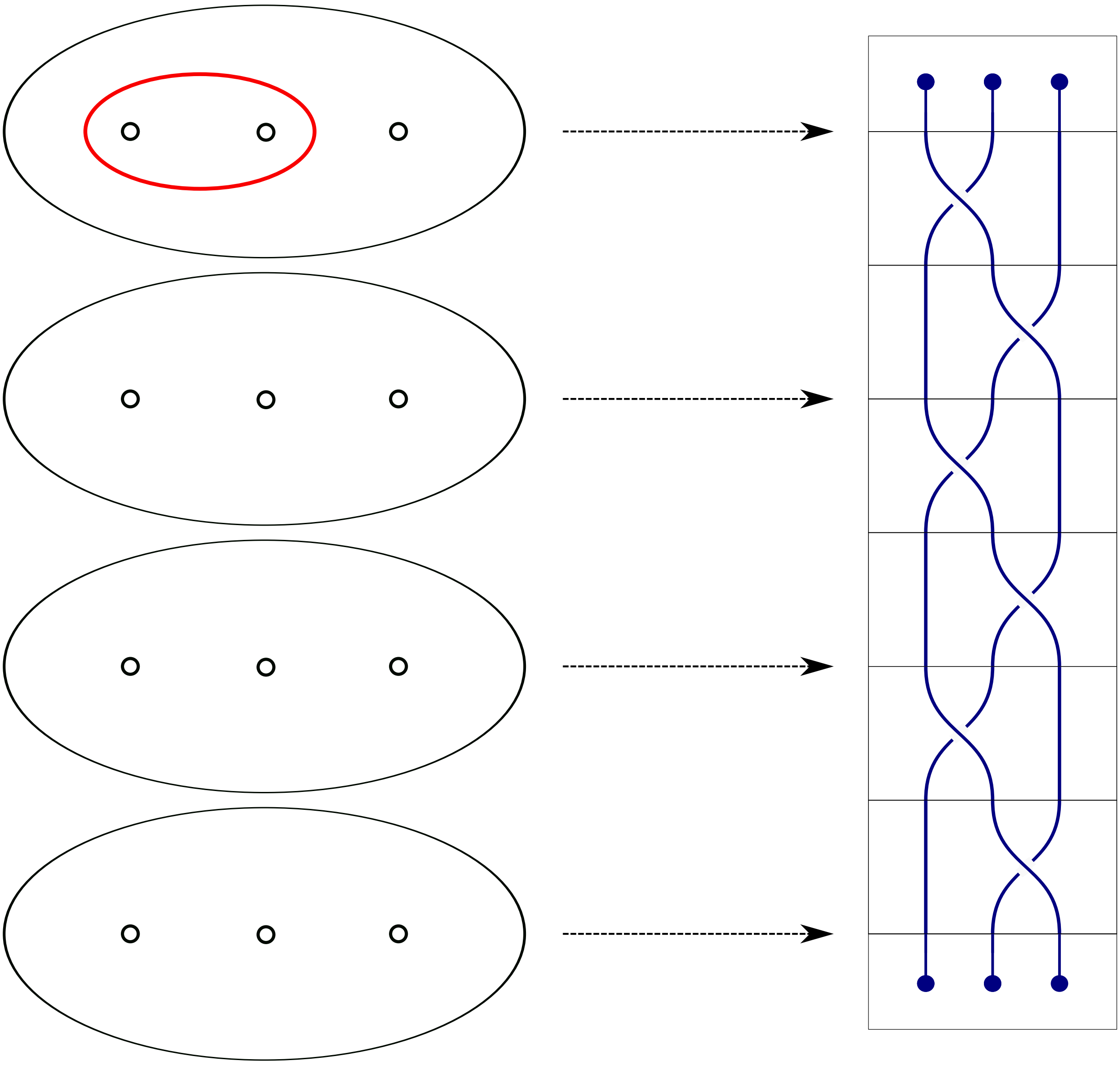


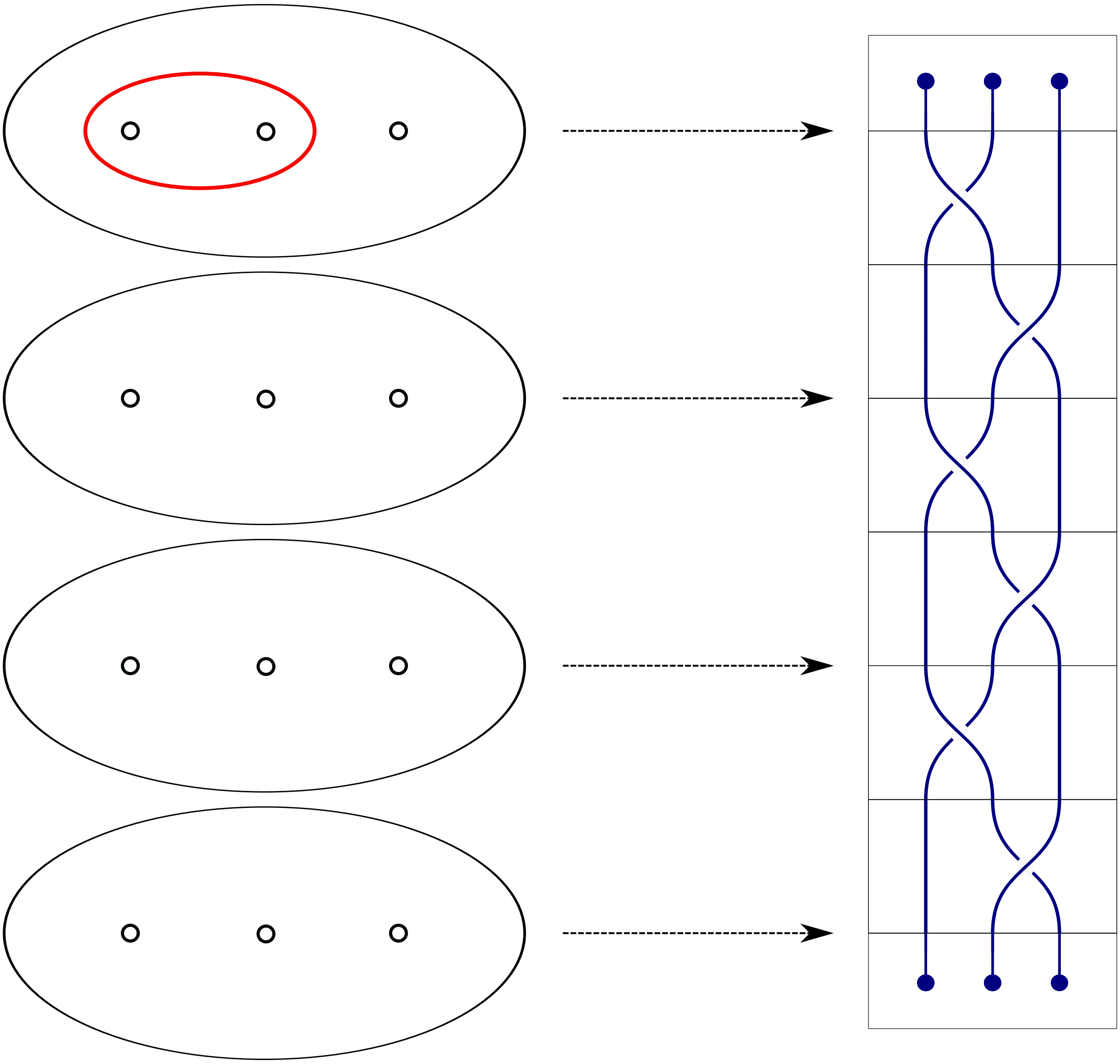


4. Parmi les tresses nouées, certaines sont nouées de façon particulièrement compliquée... Pour mesurer la complexité d'une tresse, on peut jouer au jeu suivant. On répète la même tresse plusieurs fois de suite, on place un élastique autour de deux des brins près des extrémités du haut, et on le fait glisser le long de la tresse. Voici un exemple avec trois fois la même carte : à gauche, on a représenté l'élastique vu du dessus, avec une coupe des trois brins.



Dans chacun des deux exemples qui suivent on a représenté trois fois la même tresse de deux cartes. *Pouvez-vous dessiner les déformations successives de l'élastique ?*





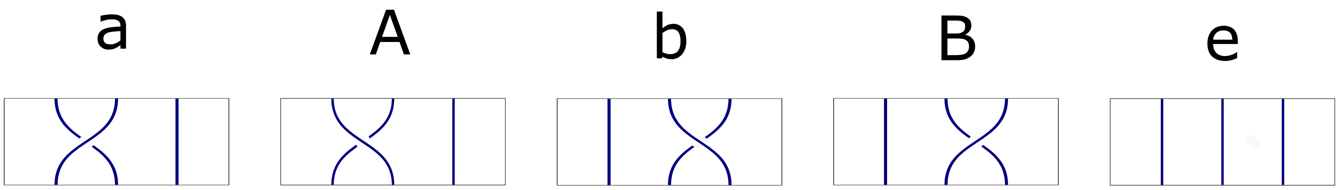
Dans ce dernier exemple, on constate que la longueur de l'élastique augmente de façon exponentielle lorsqu'on le fait glisser le long de copies successives de la tresse. En fait, avec cette tresse, c'est ce qui arrive à tout élastique qui est placé autour de deux de ses brins. Ce phénomène caractérise les tresses dites "pseudo-Anosov", ce sont celles que les mathématiciens considèrent comme les plus compliquées.

Comme application, on peut penser aux petits batteurs électriques que vous avez (peut-être) chez vous. Si les deux fouets

de votre batteur tournaient dans le même sens, alors ils mélangeraient votre mousse au chocolat comme dans le premier exemple ! Heureusement, vous pouvez observer qu'ils tournent dans le sens opposé. La photo qui suit montre des bonbons chinois faits sur le même modèle !

5. Une question courante en théorie des groupes est de savoir si deux éléments d'un groupe *commutent* : si on multiplie le premier avec le deuxième, est-ce qu'on obtient le même résultat que si l'on multiplie le deuxième avec le premier (*attention à l'ordre !*).

Essayer avec les cinq cartes qui vous sont proposées. Lesquelles commutent entre elles ?



6. La tresse dénouée commute évidemment avec tout le monde. Pouvez-vous trouver une autre tresse avec cette propriété ? (*Indice : pensez à ce qu'il se passe si on fait faire un "tour complet" aux cordelettes attachées à la planche...*).