Puzzles polygonaux

Le but ultime du stand est de démontrer le théorème dit de Lowry-Wallace-Bolyai-Gerwien qui affirme que, lorsque deux polygones ont la même aire, on peut découper le premier polygone en un nombre fini de morceaux polygonaux et les réarranger pour former le second polygone.

La preuve proposée est la suivante. On dit qu'un polygone A est équivalent à un polygone B (sous-entendu, par découpage et recollement) si on peut découper A en morceaux et réassembler les morceaux pour obtenir B. Cette notion est clairement une relation d'équivalence.

1) Tout rectangle est équivalent à un carré.
2) Tout triangle est équivalent à un rectangle (et donc à un carré).
3) La réunion de deux carrés disjoints, ayant des côtés quelconques, est équivalente à un carré.

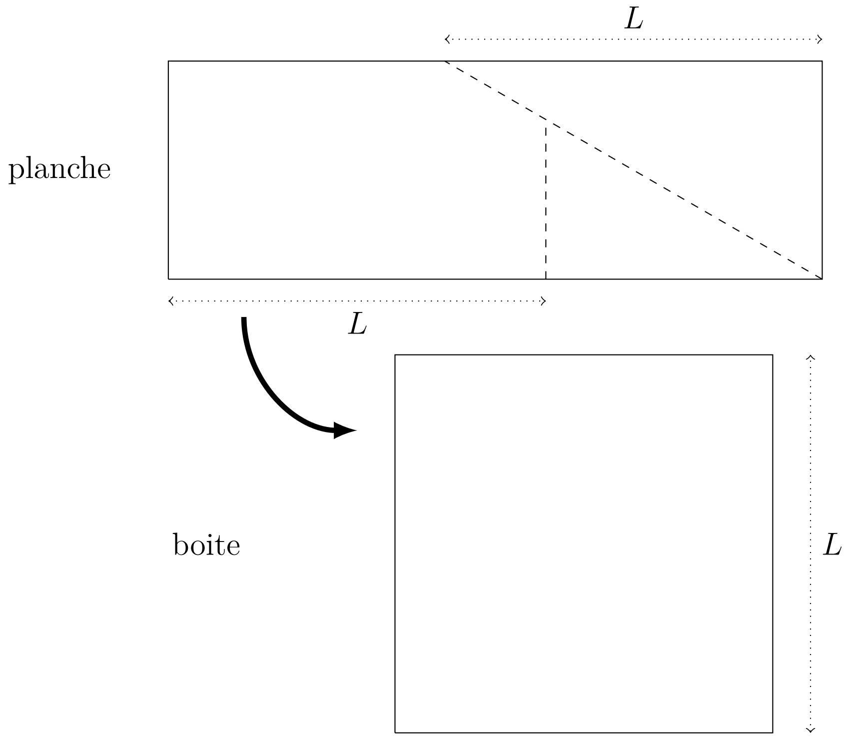
Etant donné un polygone A, on peut le découper en triangles, d'après (2) il est donc équivalent à une réunion disjointes de carrés, et d'après (3), par récurrence sur le nombre de carrés, cette réunion est elle-même équivalente à un unique carré. Finalement tout polygone est équivalent au carré de même aire, et donc par transitivité à tous les polygones de même aires.

Il ne reste plus qu'à comprendre comment effectuer les découpages 1, 2, 3. Le stand donne le principe de chaque découpage, avec plus ou moins de détails selon le niveau : au niveau bleu on ne donne que le schéma et il faut trouver les longueurs adaptées.

Le découpage (3) peut s'obtenir par le joli découpage d'Airy qui fait intervenir le théorème de Pythagore : si on note a et b les côtés des carrés A et B, alors le carré C équivalent à la réunio disjointe de A et B a pour côté c qui vérifier $c^2 = a^2 + b^2$. Ceci permet de trouver la longueur adaptée sur le schéma fourni. (voir aussi Images des maths, cliquer ici).

Le découpage (2) est très facile !

Le découpage (1) est facile avec le schéma fourni, il faut juste penser à prendre le côté L du carré-cible (la boite) comme grand c oté du triangle. **Attention**, il y a une subtilité, dans le cas général, pour cette étape : la construction ne fonctionne que lorsque le rectangle n'est pas trop allongé : le rapport entre la longueur du grand cˆté et celle du petit doit être inférieur à 4. **Dans le cas contraire, il suffit de commencer par découper le rectangle en deux par le milieu pour le transformer en un rectangle moins allongé, et de répéter éventuellement cette opération autant de fois que nécessaire pour arriver à un rapport ≤ 4.** On peut éventuellement passer cette subtilité sous le tapis...



On ne mentionne pas le théorème au début du stand : on se contente de faire effecture chaque étape découpage sous forme de petites énigmes, et à la fin on propose de “recoller les morceaux” pour démontrer le théorème.