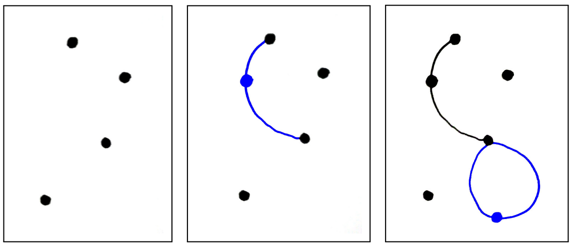
Les pousses poussent

Ce stand étudie un jeu, connus sous le nom de « sprouts game » ou « jeu des pousses » qui se joue à deux, à l'aide d'un papier et d'un crayon. Placez des points sur la feuille (autant que vous voulez). Chacun leur tour, les joueurs doivent relier deux points avec une ligne et placer un nouveau point sur cette ligne. On peut aussi relier un point à lui-même par une ligne, et ajouter un point dessus.



Deux règles à respecter :

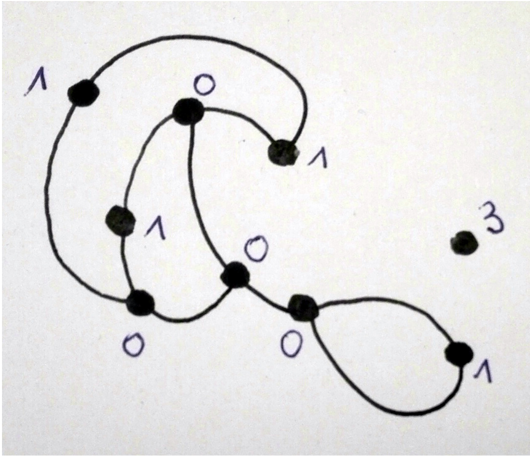
- les lignes ne doivent jamais se croiser,
- d'un même point ne peuvent pas partir plus de 3 lignes.

Le premier joueur qui ne peut plus jouer en respectant ces règles a perdu.

Premiers essais

1. Au début, les points ont 3 *degrés de liberté* : de chacun pourraient éventuellement partir 3 lignes. Quand on trace une ligne partant d'un point ou y arrivant, il perd un degré de liberté.

2. La somme de tous les degrés de liberté est égale à 7.



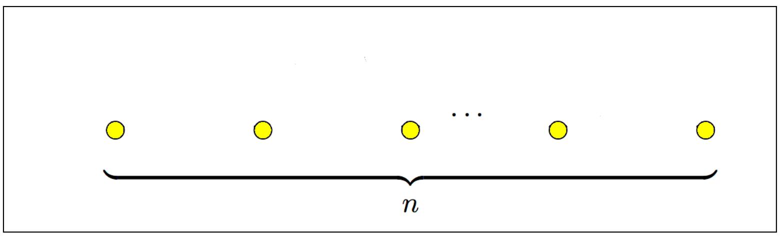
Parties longues

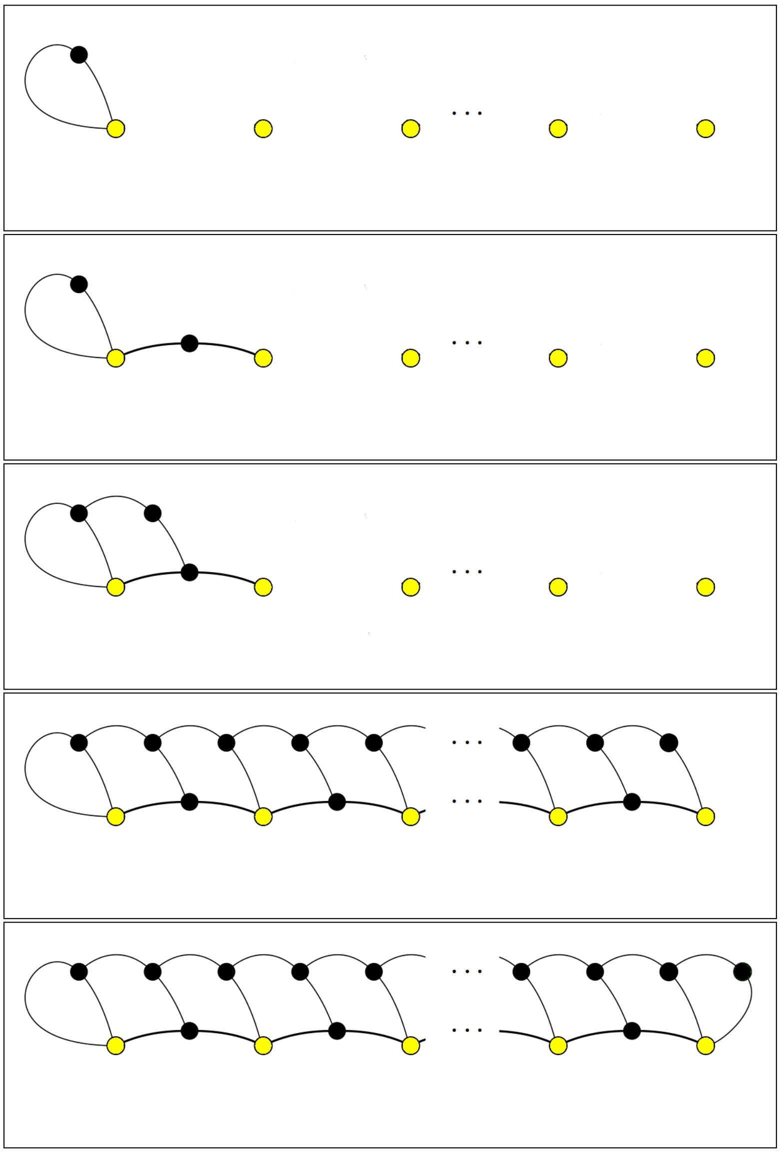
Elles sont étudiées dans les trois niveaux. Ici on présente tous les raisonnements avec un nombre quelconque n de points au départ (ce nombre est fixé dans les fiches jaune et orange).

3. Avant de démarrer la partie, il y a $3n$ degrés de liberté (3 par point). Quand joue un coup, on perd 2 degrés de liberté en traçant une ligne d'un point à un autre, et on en gagne un en ajoutant un point sur cette ligne. Donc chaque fois qu'on joue un coup, le nombre de degrés de liberté diminue de 1.

4. Si on arrive à jouer $3n - 1$ coups, il reste 1 seul degré de liberté, ce qui est insuffisant pour tracer un nouvel arc (il en faudrait au moins 2). La partie ne peut donc pas durer plus.

5. Un exemple de partie la plus longue possible avec n points de départ :





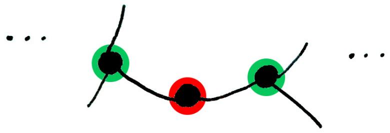
Parties courtes

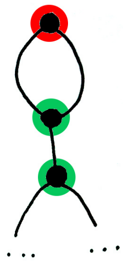
Notre but maintenant est de trouver des parties durant le moins possible.

6. Quand la partie est terminée, il ne peut pas rester de points avec 3 degrés ni avec 2 degrés de liberté (on pourrait les relier à eux-même), seulement avec 0 ou 1 degré de liberté.

À la fin d'une partie, on colorie en rouge les points qui ont encore un degré de liberté, en vert ses deux voisins. On laisse en blanc les autres points.

Quand le point rouge est sur une boucle, on va chercher un peu plus loin le voisin suivant, comme sur le schéma en bas à droite :



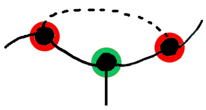


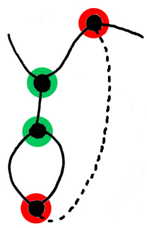
7. Jouez une partie et, quand elle est terminée, coloriez ses points comme expliqué ci-dessus. Remplir le tableau

nombre de...						
points au départ n	**coups joués** k	**points au total** p	**points rouges** r	**points verts** v	**points blancs** b	$3r+b$

8. Le nombre total de points p est égal au nombre de points de départ n plus le nombre de points ajoutés, c'est-à-dire le nombre de coups joués. On a donc $p = n + k$.

De plus, il y a exactement deux fois plus de points verts que de points rouges. En effet, chaque point rouge a deux voisins verts, et ceux-ci lui sont propres. Si deux points rouges partageaient un voisin commun, on serait dans l'une des situations suivantes :





ce qui n'est pas possible puisqu'on pourrait alors relier les deux points rouges (voir les pointillés) et la partie ne serait pas terminée.

Le nombre total de points est donc $p = r + v + b = 3r + b$.

9. D'une part, le nombre total de degrés de liberté à la fin du jeu est égal au nombre de points à 1 degré de liberté, c'est-à-dire r. D'autre part, comme il vaut $3n$ au début de la partie et diminue de 1 à chaque coup joué, il vaut à la fin $3n - k$. D'où

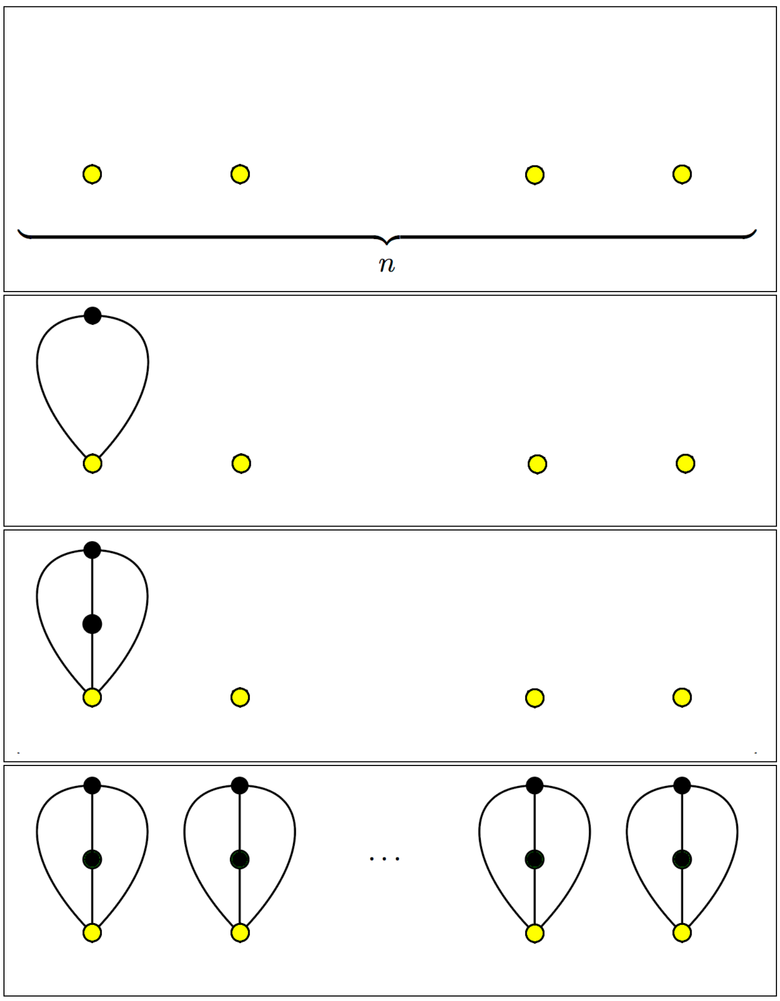
$$3n - k = r$$

10. En reportant $r = 3n - k$ dans la relation $n + k = 3r + b$ trouvée à la question 0, on obtient $n + k = 9n - 3k + b$, d'où :

$$k = 2n + \frac{b}{4}$$

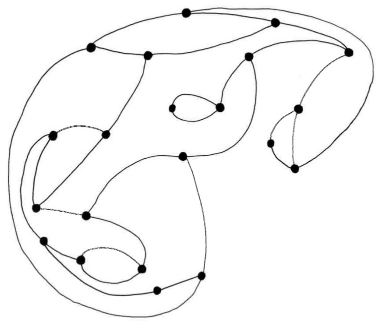
11. On en déduit immédiatement qu'une partie dure au moins $2n$ coups. On peut aussi remarquer que le nombre de points blancs est un multiple de 4.

Exemple une partie qui dure exactement $2n$ coups :



Partie mystère

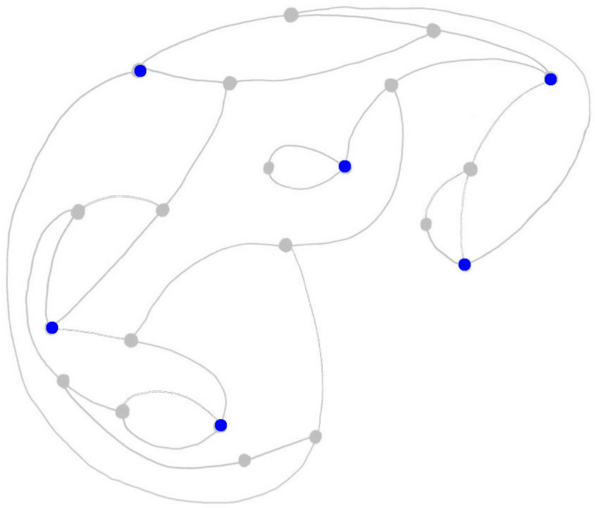
On retrouve une feuille avec une partie déjà jouée.



12. À chaque coup joué, on trace exactement deux arêtes sur le graphe. Pour compter le nombre de coups de la partie, il suffit donc de compter le nombre d'arêtes et de diviser par 2. Pour compter sans se tromper, on peut marquer au fur et à mesure les arêtes déjà comptabiliséss (la partie mystère est imprimée sur des feuilles, et aussi en version plastifiée sur laquelle on peut écrire au feutre effaçable pour tableau. Dans l'exemple, il y a 30 arêtes, donc 15 coups joués. À chaque coup on a ajouté un point. Le nombre total de points est 21 (ne pas hésiter à les barrer au fur et à mesure pour compter), donc il y en avait $21 - 15 = 6$ au départ.

13. Il n'est pas facile de reconstituer une partie aboutissant à ce dessin. Il n'y a pas unicité de la réponse. On pourra essayer de procéder par tâtonnements, par exemple en marquant à l'encre les coups dans l'ordre souhaité sur les dessins imprimés en gris clair.

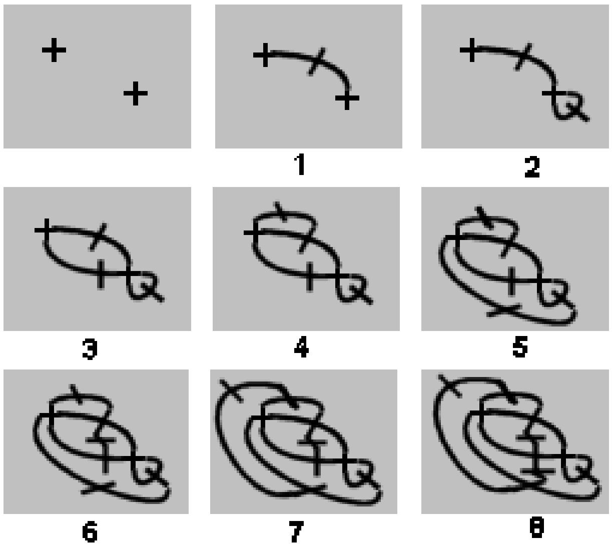
Un exemple de solution est de prendre comme points de départ ceux indiqués en bleu sur la figure suivante :



Quelques remarques

Le jeu des pousses est un jeu à stratégie gagnante (car il est fini, sans partie nulle, sans intervention du hasard). Non seulement les stratégies gagnantes de sont pas connues explicitement, mais on ne sait pas lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ! Une conjecture dit que si le nombre n de points de départ est congru à 0,1 ou 2 modulo 6, c'est le deuxième joueur a une stratégie gagnante et quand il est congru à 3,4 ou 5 modulo 6, c'est le premier joueur qui en a une. Cette conjecture n'est démontrée que pour de petites valeurs de n (de l'ordre de 40), par ordinateur, et n'est pas connue dans le cas général. Pour de toutes petites valeurs de n (1,2,3), on peut sans trop de fatigue déterminer les stratégies gagnantes à la main, en regardant tous les coups possibles.

Une variante de ce jeu, connue sous le nom de « jeu des choux de Bruxelles » ou « Brussel sprouts » est la suivante : on commence avec un certain nombre n de croix (points à 4 degrés de liberté). À chaque coup, on doit relier deux de ces extrémités libres par une ligne, et ajouter un petit trait sur cette ligne pour créer deux nouvelles extrémités. Les lignes tracées ne peuvent se croiser.



En considérant la caractéristique d'Euler du graphe, on peut montrer qu'un tel jeu se finit toujours en $5n-2$ coups. Le jeu n'a donc aucun intérêt, la façon de jouer n'a aucune influence sur le résultat, et on sait à l'avance quel joueur gagnera (selon la parité de n).

Voir par exemple la page wikipedia pour les détails :

`https://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_(game)`