Pyramides magiques...

J1, J2, J3, O1, O2, O3, B1 Le triangle est équilatéral, possède 3 sommets et vit en dimension 2. Il s'agit de réviser (orange) ou d'apprendre (jaune) un peu de vocabulaire. En version jaune, l'indice permet de comprendre la notion de deux dimensions.

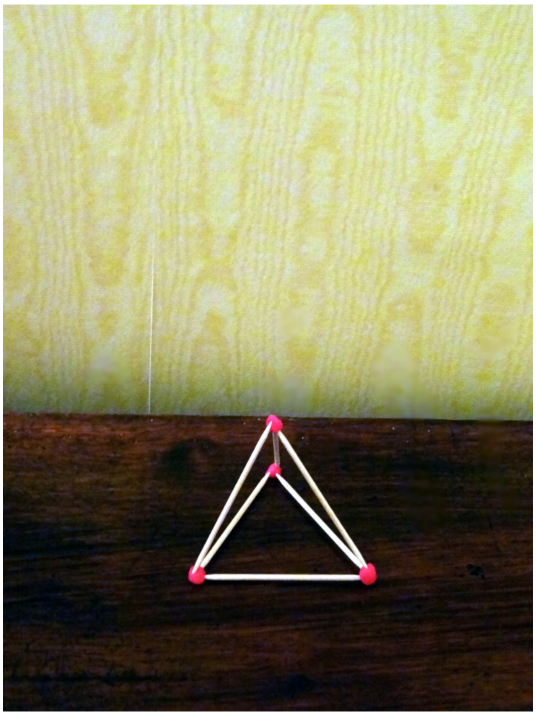
J4, O4, B2 On a 4 faces en forme de triangle. Faire aussi compter les 6 arêtes.

O5, B2 En version orange, on espère voir la formule

$$\frac{\text{base x hauteur}}{2}.$$

Suivant le cas proposez de faire le calcul à l'aide du théorème de Pythagore (ne pas hésiter à le rappeler si besoin), éventuellement en donnant une valeur à la longueur ℓ, exprimée en cm, du côté du triangle : $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell\, cm$ et $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\, cm^2$.
A priori, pas d'indication à donner en version bleue.

J5, J6, O6, O7, B3 La "pyramide" est un tétraèdre. En version jaune voire orange, on continuera à parler de pyramide dans la suite.



Sur le stand, on présente d'autres polyèdres (tous les solides de Platon et un polyèdre quelconque). Il faut en trouver les noms. En version jaune et orange, on peut proposer les tableaux plastifiés

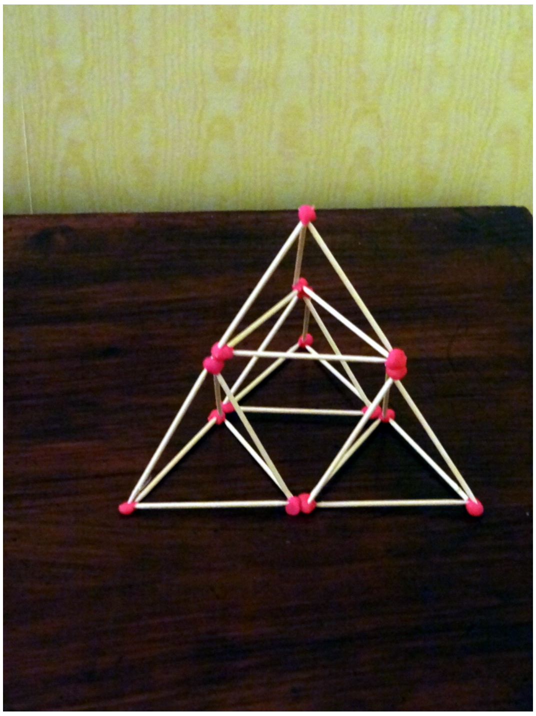
français/grec où figurent les différents noms des objets présentés : hexaèdre, 6 faces ; octaèdre, 8 faces ; dodécaèdre, 12 faces ; icosèdre, 20 faces, ... Le préfixe "icosa" ne figure pas dans le tableau, uniquement dans la liste de noms proposée au participant. À lui de le découvrir par élimination. Et puis oui, on attend "hexaèdre" pour le cube !
En version jaune, on pourra demander la différence entre la pyramide/tétraèdre et la pyramide égyptienne (qui est à base carrée et possède 5 faces, une carrée et 4 triangulaires).

O8 Il s'agit de rappeler ici, point important au programme du brevet, que si les longueurs sont multipliées par 2, les volumes sont multipliés par 2^3. On pourra demander ce qu'il en est des aires.
On peut alors aussi demander comment calculer le volume de la petite pyramide

$$\frac{1}{3}\,\text{Aire de la base} \times \text{hauteur},$$

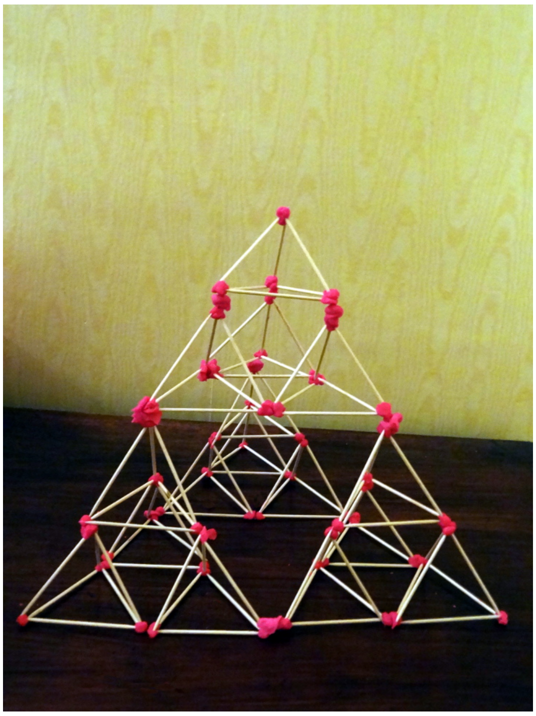
autre formule classique au programme du brevet ! L'aire de la base a été calculée en question O5.
Le calcul de la hauteur H est fait en question **B6** mais pourrait être abordé avec un public orange qui n'aurait pas eu de mal sur le calcul de la hauteur h précédemment...

La version jaune s'arrête sur la réalisation de la grande pyramide (mais on peut quand même compter les bâtonnets et les sommets... et rien n'empêche les enfants de continuer la construction...) :



O9 On a utilisé 6 bâtonnets pour chacun des 4 petits tétraèdres, donc $6.4 = 24$ au total. Chaque petit tétraèdre possède 4 sommets/boules de pâte à modeler, ce qui fait 16 boules au total, mais il faut décompter les 6 qui se "recollent" (les boules de pâte à modeler deviennent de plus en plus grosses), d'où 10 boules de pâte à modeler au total.

O10, B4 La construction donne



Pour construire le très grand tétraèdre/très grande pyramide, on a utilisé 4 grands tétraèdres/grandes pyramides construits chacun avec 6.4 bâtonnets, donc on a utilisé $6.4^2 = 96$ bâtonnets.

Chacun des 4 grands tétraèdres/grandes pyramides compte 10 boules de pâte à modeler soit 40 boules, auxquelles il faut enlever les 6 qui se "recollent" d'où 34 boules.

B5 Le nombre de bâtonnets utilisés est multiplié par 4 à chaque niveau. Donc au niveau n, on aura utilisé 6.4^{n-1} bâtonnets.
Le nombre $\mathcal{N}_n$ de boules de pâte à modeler au niveau n s'exprime en fonction de celui $\mathcal{N}_{n-1}$ au niveau $n-1$: $\mathcal{N}_n = 4\,\mathcal{N}_{n-1} - 6$, avec $\mathcal{N}_1 = 4$.
Petit exercice classique sur les suites arithmético-géométriques. Un élève de Terminale S ou de Terminale ES doit pouvoir aller jusque-là pourvu qu'on lui demande de montrer que la suite définie par $u_n = \mathcal{N}_n - 2$ est géométrique de raison 4. D'où :
$u_n = 4^{n-1}u_1 = 4^{n-1}\,(\mathcal{N}_1 - 2) = 2.4^{n-1}$ et $\mathcal{N}_n = 2\,(1 + 4^{n-1})$.

B6 Les longueurs sont divisées par n, donc les volumes par n^3. Si $\mathcal{V}_1$ désigne le volume du grand tétraèdre de départ et $\mathcal{V}_n$ celui d'un des petits tétraèdres obtenus après n opérations, on a : $\mathcal{V}_n = \dfrac{\mathcal{V}_1}{n^3}$.
Demander à cette occasion le calcul du volume d'un tétraèdre. Voir **B2** pour le calcul de l'aire de la base. Le calcul de la hauteur H du tétraèdre se fait en utilisant le triangle rectangle de côtés H et $\frac{2h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ell$ et d'hypothénuse ℓ. D'où :
$H = \sqrt{\frac{2}{3}}\ell$ et $\frac{1}{3}$ Aire de la base $\times$ hauteur $= \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 \times \sqrt{\frac{2}{3}}\ell = \frac{1}{6\sqrt{2}}\ell^3$.

université PARIS DIDEROT PARIS 7 — SORBONNE UNIVERSITÉ — cnrs — PARIS IREM