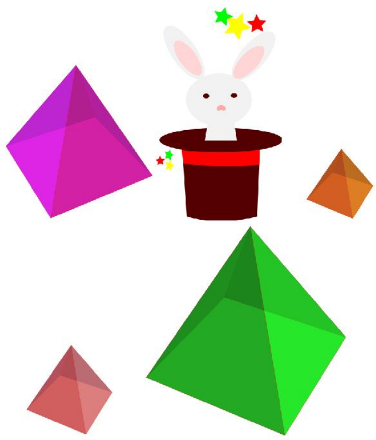
LES MATHS FANTASTIQUES

Pyramides magiques...



⇝ Étape 1

Prenez 3 bâtonnets, mettez une petite boule de pâte à modeler au bout de chacun, et assemblez-les pour constituer un TRIANGLE.

1. Quelle est la nature de ce triangle ?
Est-il isocèle, équilatéral, rectangle, quelconque ?

Le triangle obtenu est une figure **plane**.

⇝ Étape 2

Prenez de nouveaux bâtonnets. À nouveau, à chaque extrémité, mettez une boule de pâte à modeler, et assemblez les bâtonnets sur votre triangle pour obtenir un tétraèdre.

2. Combien de faces comptez-vous ?
Pouvez-vous calculer l'aire de l'une de ces faces ?

3. Regardez les objets sur la table. Quels sont leurs noms mathématiques ?

$\rightsquigarrow$ Étape 3

Faites 3 autres tétraèdres.

$\rightsquigarrow$ Étape 4

Avec des boules de pâte à modeler, assemblez ces nouveaux tétraèdres avec le premier de façon à obtenir un grand tétraèdre constitué de quatre petits tétraèdres.

4. En fin de compte, combien faut-il de bâtonnets et de boules de pâte à modeler pour fabriquer ce grand tétraèdre ?

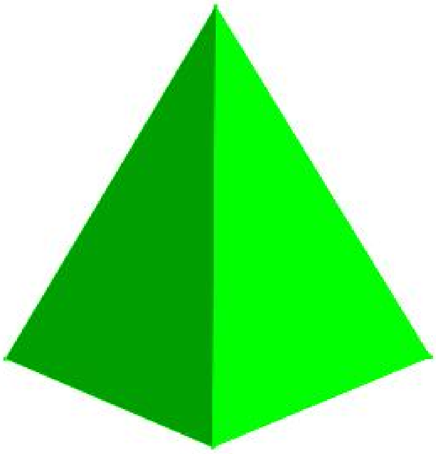
Au niveau 1, vous avez construit un petit tétraèdre, et au niveau 2, un grand tétraèdre. Si vous assemblez 4 des ces grands tétraèdres au niveau 3, vous obtiendez un très grand tétraèdre. Et ainsi de suite...

5. Au total, combien faut-il de bâtonnets et de boules de pâte à modeler pour construire un tétraèdre au niveau n ?

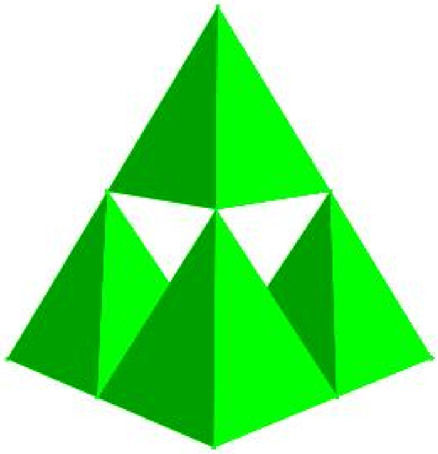
Le problème à l'envers !

Cette fois, on effectue l'opération "inverse".

On part d'un tétraèdre plein T_1. On le "divise" en 5 tétraèdres identiques, on enlève le tétraèdre "central" comme sur la figure et on appelle T_2 l'objet obtenu :

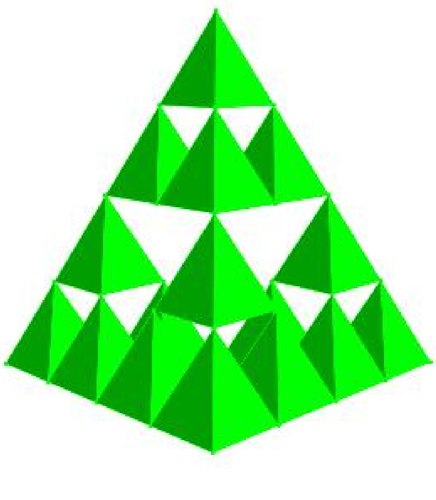


T_1

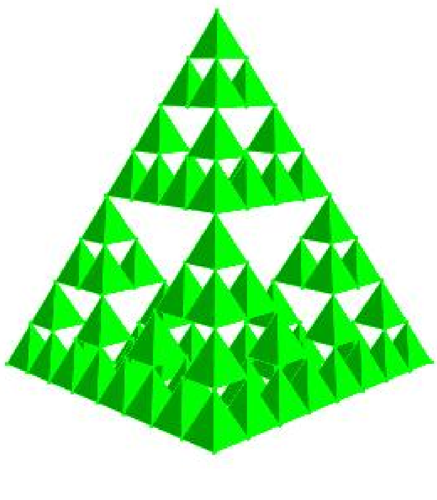


T_2

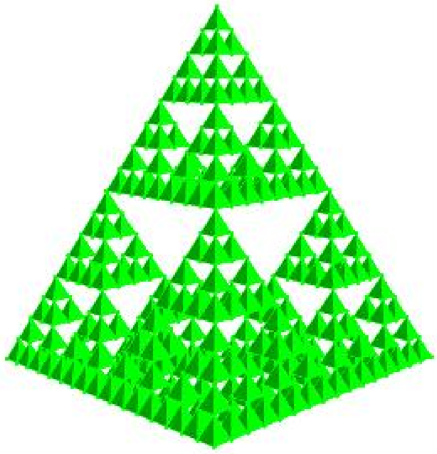
On répète cette opération un nombre n de fois :



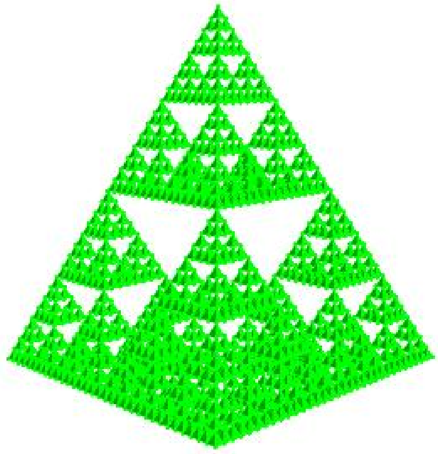
T_3



T_4



T_5



T_6

$\dots$

6. Quel est le lien entre le volume du grand tétraèdre de départ, et celui de l'un des petits tétraèdres obtenus au bout de ces n opérations ?
Et entre les aires de l'une de leurs faces ?

L'intersection de tous ces objets T_n pour $n \geq 1$ est un objet dit "fractal" appelé Tétraèdre de Sierpiński ! Il a la propriété d'autosimilarité et contient des sous-objets qui sont eux-mêmes des tétraèdres de Sierpiński.

Pour la petite histoire ...

Wacław Franciszek Sierpiński
était un mathématicien polonais (1882-1969).