Comment manger beaucoup de pizza ?

Le but de l'atelier est de goûter à la théorie des jeux sur un exemple ludique. Parmi les objectifs secondaires possibles : pour les plus jeunes, introduire et manipuler les fractions, et utiliser la notion de parité ; pour les plus grand·e·s, se familiariser avec la notion de démonstration ; ...

B1 Il faut jouer !

B2 Dans ces trois cas, la stratégie optimale pour Alice (quel que soit le découpage) consiste à choisir d'abord la plus grosse part. Dans le cas $N = 3$, les plus jeunes doivent réussir à se convaincre que c'est bien la meilleure stratégie, et que cela assure à Alice au moins la moitié de la pizza.
Pour Bob, la stratégie optimale dans le cas $N = 2$ consiste à couper en deux parts égales, et pour $N = 3$, en deux parts identiques presque égales à la moitié, et une troisième très petite (voire de taille nulle, si on accepte les parts de taille nulle). Cela assure à Bob (presque) la moitié de la pizza. Il peut être intéressant pour les plus jeunes de se convaincre que si on interdit les parts nulles, il n'y a jamais égalité (pour $N = 3$) et Alice gagne toujours strictement.

B3 Pour $N = 4$, on peut penser à au moins deux stratégies naturelles pour Alice (il y en a sans doute d'autres). Un découpage étant fixé, on peut colorier les parts avec deux couleurs (vert et bleu par exemple), en alternant. Alors Alice choisit la couleur telle que la somme des parts de cette couleur est au moins égale à la moitié de la pizza. Puis elle commence par l'une des parts de cette couleur. Pour sa seconde part, elle pourra toujours choisir l'autre part de la même couleur que la première, et s'assurer ainsi au moins la moitié de la pizza. Une autre stratégie pour Alice, dite stratégie gourmande : toujours choisir la plus grosse part disponible. On peut montrer (ce n'est pas très difficile) que pour $N = 4$, cela assure plus de la moitié de la pizza pour Alice, et que cette stratégie est meilleure que la précédente dans tous les cas.
En ce qui concerne Bob, une stratégie pour s'assurer la moitié de la pizza est par exemple de couper quatre parts égales. Il peut donc y avoir égalité dans ce cas, sans part nulle.

B4 On s'inspire du cas $N = 4$. Quand le nombre N est pair, la première stratégie du coloriage en deux couleurs fonctionne toujours pour Alice : elle choisit la couleur majoritaire pour sa première part, puis elle peut toujours s'arranger pour choisir uniquement cette couleur à chaque coup, en suivant le coup précédent de Bob. Cela lui assure au moins la moitié de la pizza, quel que soit le découpage.
Pour Bob, une stratégie optimale lui assurant la moitié consiste à couper en N parts égales.

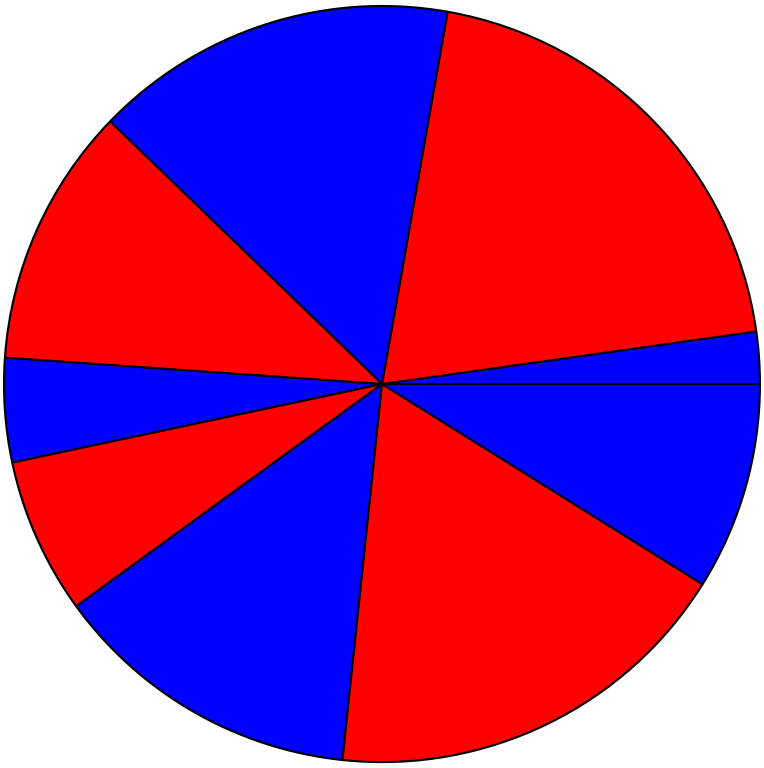
B5 Au vu de la question précédente, il suffit de traiter le cas N impair. On peut s'inspirer du cas $N = 3$, en proposant un découpage en $N - 1$ parts égales, et une part nulle (ou presque).

B6 Un découpage étant donné, Alice choisit au hasard la première part, puis suit les coups de Bob. Si jamais elle ne gagne pas, on pourra constater qu'il existe deux parts non adjacentes B1 et B2 dont la taille cumulée dépasse la moitié de la pizza (ce sont les parts qui ont été choisies par Bob) ; alors on peut montrer, en étudiant quelques cas, que choisir l'une de ces deux parts en premier (pas forcément la plus grosse...) et suivre Bob assure la victoire à Alice. Indication : si en choisissant la plus grosse des deux parts, disons B1, Alice perd, cela signifie qu'il existe une troisième part B3 (voisine de B1 et pas de B2),

telle que B2 et B3 fassent à elles-deux plus de la moitié. Alors commencer par B2 assure la victoire pour Alice (à la fin, elle aura au moins B1 et B2, ou B2 et B3).
Sur l'exemple proposé, on voit que Bob gagne si Alice choisit la plus grosse part au premier tour, donc la stratégie gourmande n'est pas bonne ici. Dans ce cas, une stratégie gagnante pour Alice consiste à commencer par la part de taille 4 qui est entourée par des 1, puis suivre Bob.

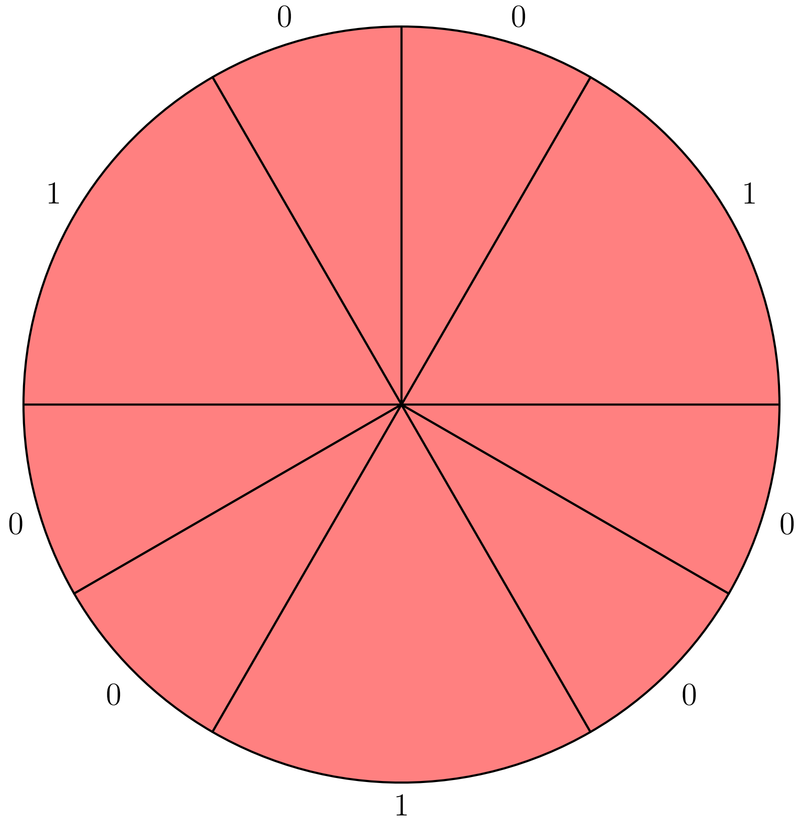
B7 Mêmes idées que pour $N = 7$. Si jamais Alice perd en suivant Bob, on montre qu'il existe trois parts, deux-à-deux non adjacentes, dont la somme des tailles dépasse la moitié. Alice recommence en choisissant cette fois l'une de ces trois parts au début. Si elle perd à nouveau, cela fournit une nouvelle configuration de trois parts deux-à-deux non adjacentes dont la somme dépasse la moitié, et cette nouvelle configuration a une ou deux parts en commun avec la première. On montrer alors qu'en choisissant au premier coup (et pas n'importe comment) l'une de ces parts en commun, la stratégie consistant à suivre Bob permet à Alice d'assure la moitié de la pizza.

B8 La stratégie consistant à suivre Bob aboutit à une répartition finale "alternée" entre Alice et Bob, sauf à un unique endroit, que l'on notera C, où deux parts d'Alice dont voisines (sur le dessin, $N = 9$ et Alice est en bleu) :

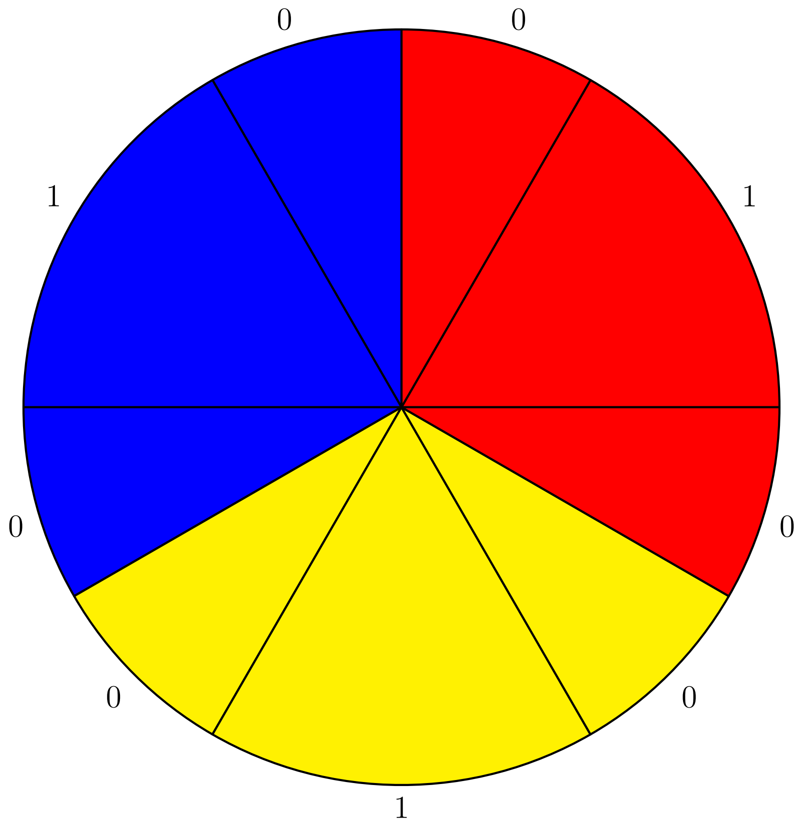


Considérons alors la plus mauvaise telle répartition pour Alice, et supposons que pour celle-ci, la somme des parts bleues soit inférieure à $\frac{1}{3}$ (sinon, il n'y a rien à démontrer). Par conséquent, la somme des parts rouges est supérieure à $\frac{2}{3}$. Il existe donc une part rouge R telle que la somme des parts rouges de R à C, R comprise, *dans chaque sens*, soit supérieure à $\frac{1}{3}$. Il suffit alors à Alice de choisir cette part R comme premier coup, puis de suivre Bob. Cette stratégie garantit à Alice d'avoir à la fin toutes les parts rouges entre R et C, soit dans un sens, soit dans l'autre, donc au moins $\frac{1}{3}$ de la pizza.

B9 Pour $N = 9$, sur la découpe suivante



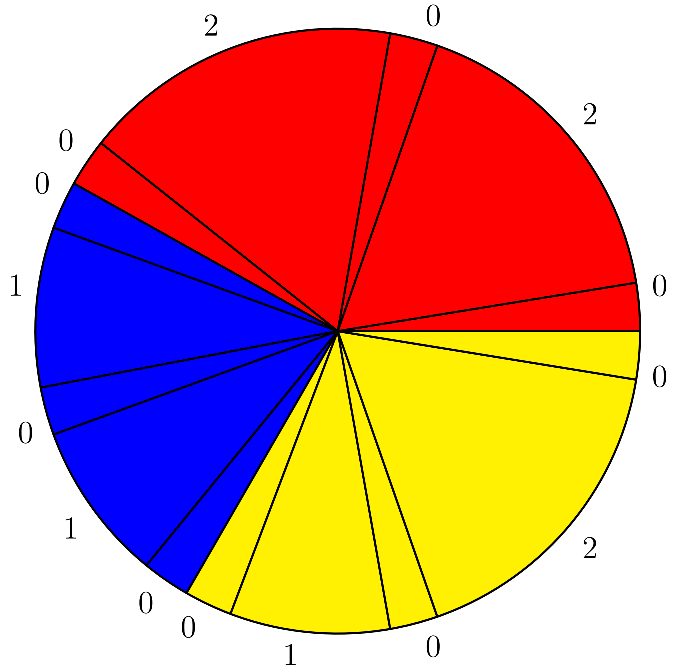
Alice ne peut faire mieux que $\frac{1}{3}$ en suivant Bob (le faire vérifier !).
On peut montrer, mais c'est un peu pénible, que pour $N = 9, 11, 13$, il existe une stratégie avec un saut permettant à Alice de manger au moins la moitié de la pizza. Cela signifie qu'il faut permettre à Alice de ne pas suivre Bob au plus une fois. On peut expliciter cette stratégie sur l'exemple précédent : on sépare la pizza en trois parties colorées de trois parts, centrées en une part 1 :



Alice choisit une part 1 à son premier coup, et la part 0 restante (de la même couleur que son premier

coup) lors de son second coup. Ensuite, elle suit Bob. C'est donc une stratégie à un saut : elle suit Bob tout le temps, sauf une fois. Cela lui assure $\frac{2}{3}$ de la pizza.
Cette stratégie se généralise (mais c'est un peu plus délicat) pour toutes les pizzas avec $N = 9, 11, 13$: si la stratégie consistant à suivre Bob ne suffit pas, il existe une stratégie gagnante à un saut pour Alice. Pour expliciter cette stratégie, on montre qu'il existe toujours une partition en 3 intervalles de couleur, tous de longueur impaire, avec des répartitions bien particulières à l'intérieur permettant de calquer la stratégie de l'exemple. On pourra par exemple réfléchir au cas général avec $N = 9$ parts.

B10 Pour manger $\frac{4}{9}$ de la pizza, Alice peut commencer par choisir l'une des parts numérotées 2 en haut de la pizza (les deux parts 2 séparées par une unique part 0), puis suivre Bob. On vérifie que cela assure à Alice au moins $\frac{4}{9}$ de la pizza.
Montrons maintenant que Bob peut limiter Alice à $\frac{4}{9}$ de la pizza. Si Alice commence par une part nulle, alors le total des tailles 8 parts restantes vaut toujours 9. Il suffit alors pour Bob de colorer les 8 parts restantes avec deux couleurs en alternance, et de suivre Alice pour manger la couleur majoritaire (cf question B4) de taille au moins 5. Dans ce cas, Bob mange bien au moins $\frac{5}{9}$ de la pizza.
Si Alice commence par une part non nulle, on partage la pizza en trois parties colorées



en séparant à chaque fois les paires de zéros consécutifs. Alors Bob choisit la part nulle adjacente à la première part d'Alice, du côté de la frontière de la zone colorée correspondante. Puis Bob suit Alice sauf si cela l'oblige à entamer une nouvelle zone colorée. Quand il ne peut faire autrement, Bob entame la nouvelle zone colorée au total le plus faible. On vérifie que cela garantit à Bob à nouveau au moins $\frac{5}{9}$ de la pizza.

B11 À partir du découpage précédent de la pizza en 15 parts, il suffit d'ajouter un nombre pair quelconque (ici $N - 15$) de parts de taille nulle (ou arbitrairement petite) entre deux zéros consécutifs. Avec ce découpage, si Alice commence avec une part nulle, on raisonne comme en B10 en coloriant en deux couleurs ; si Alice commence avec une part non nulle, on applique la méthode de B10 avec les trois couleurs, en ajoutant une couleur pour les nouvelles parts nulles. On applique ensuite la même stratégie qu'en B10, avec quatre couleurs.