

Comment manger beaucoup de pizza ?

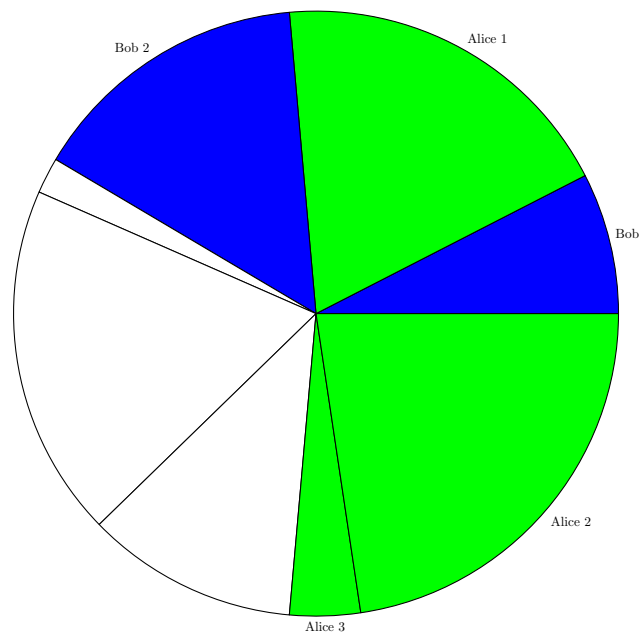
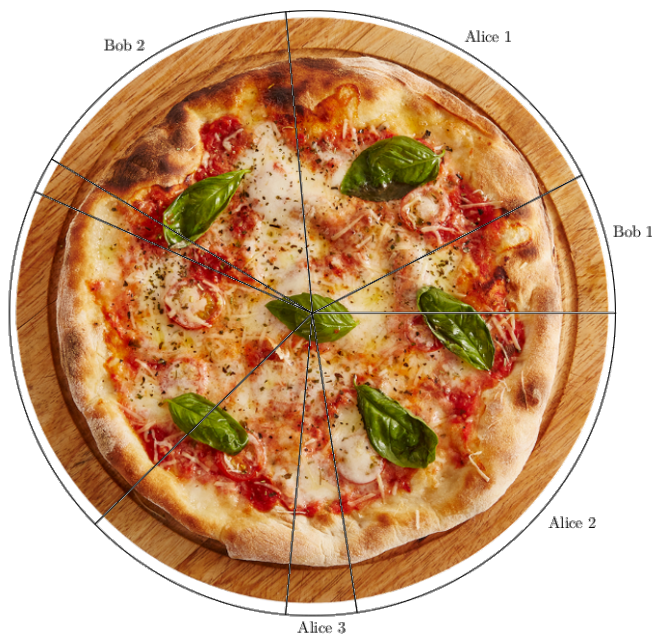
Alice et Bob ont très faim et ont acheté une excellente pizza à partager.



Bob propose de couper la pizza et de répartir les parts entre eux. Craignant la gourmandise de celui-ci, Alice suggère alors de procéder ainsi :

1. Bob découpe la pizza comme il le souhaite, pourvu que les parts soient des secteurs circulaires.
2. Alice choisit une part et la mange.
3. Chacun à son tour choisit une part adjacente à une part déjà mangée, et la mange.

Voici un exemple de début de partie :

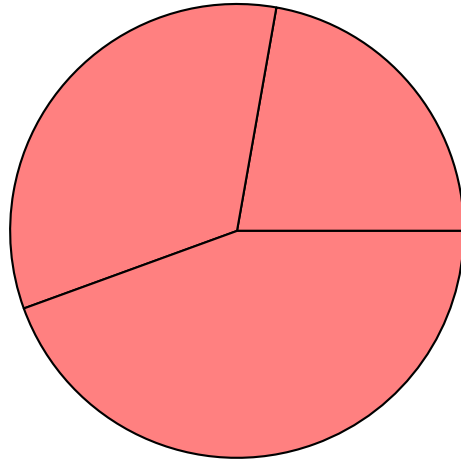


On se pose notamment les questions suivantes :

- Une fois la pizza découpée, quelle stratégie doit suivre Alice pour avoir le plus de pizza possible ?
- Dans tous les cas, quelle quantité minimale de pizza Alice peut-elle s'assurer ? Et si le nombre de parts est fixé ?
- Comment Bob doit-il couper la pizza pour avoir le plus de pizza possible ?

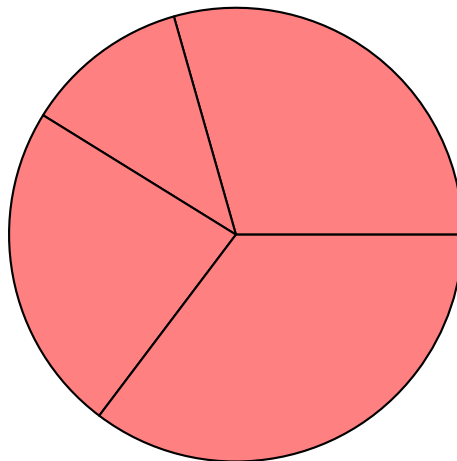
Dans toute la suite, on notera N le nombre de parts de pizza découpées par Bob.

- 1. Jouer d'abord quelques parties pour se familiariser avec les règles du jeu, en utilisant les pizzas fournies.**
- 2. Quelles sont les stratégies à suivre si $N = 1, 2, 3$?**



Dans chaque cas, quelle quantité de pizza Alice peut-elle manger avec certitude, quel que soit le découpage? Proposer un découpage qui permette à Bob d'avoir (presque) le plus de pizza possible.

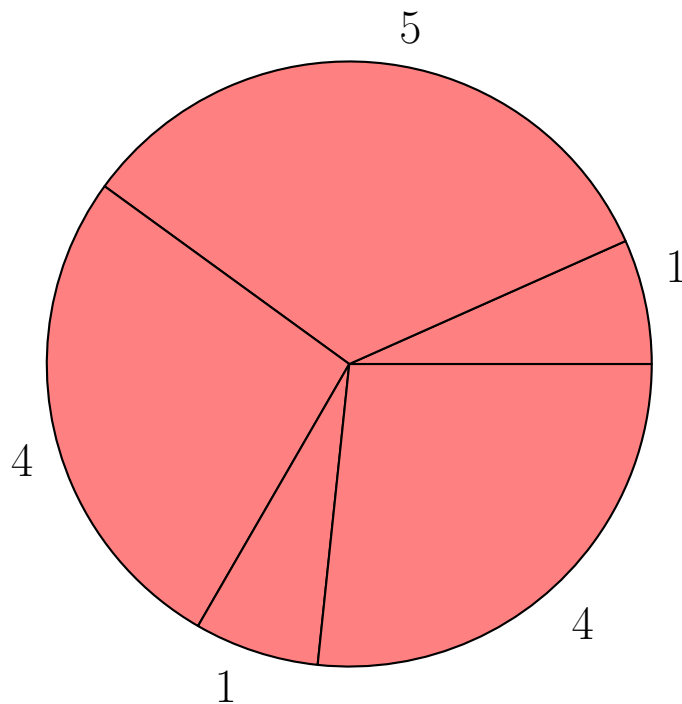
3. Mêmes questions pour $N = 4$. Dans ce cas, la stratégie gourmande pour Alice, consistant à toujours manger la plus grosse part disponible, est-elle une bonne idée?



4. Que peut-on dire quand le nombre de parts N est pair? Montrer qu'Alice peut dans ce cas manger plus (ou autant) que son adversaire, quel que soit le découpage. Quelle stratégie peut-elle suivre?

5. Pour tout $N \geq 2$, expliquer comment Bob peut découper la pizza pour s'assurer (presque) la moitié de la pizza.
6. Supposons maintenant $N = 5$. Alice décide de toujours suivre Bob, en choisissant à chaque fois la part qui suit celle que Bob vient de manger. Montrer que si Alice choisit bien sa première part, cette stratégie lui assure au moins la moitié de la pizza.

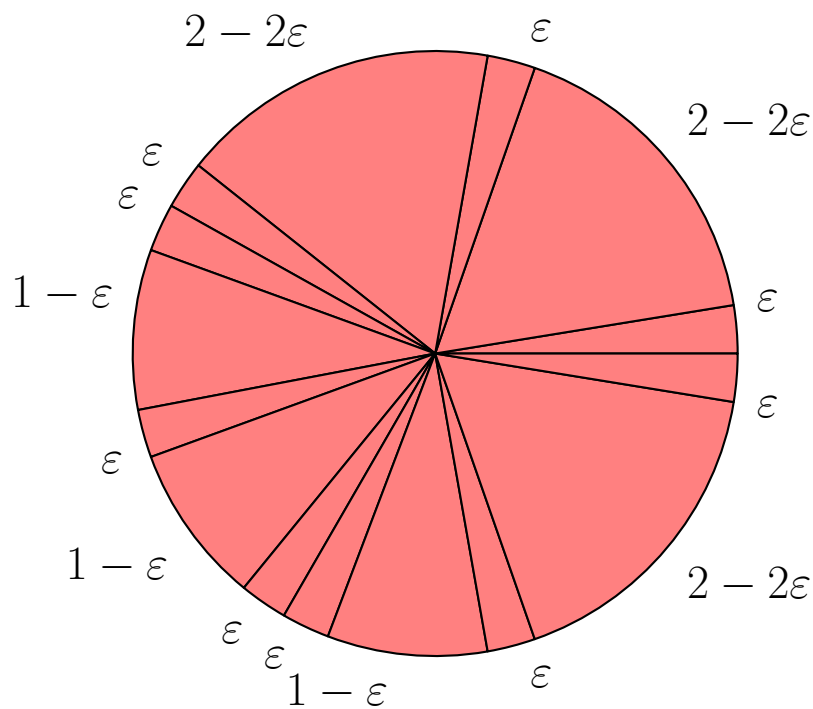
Que dire dans ce cas de la stratégie gourmande pour Alice ?



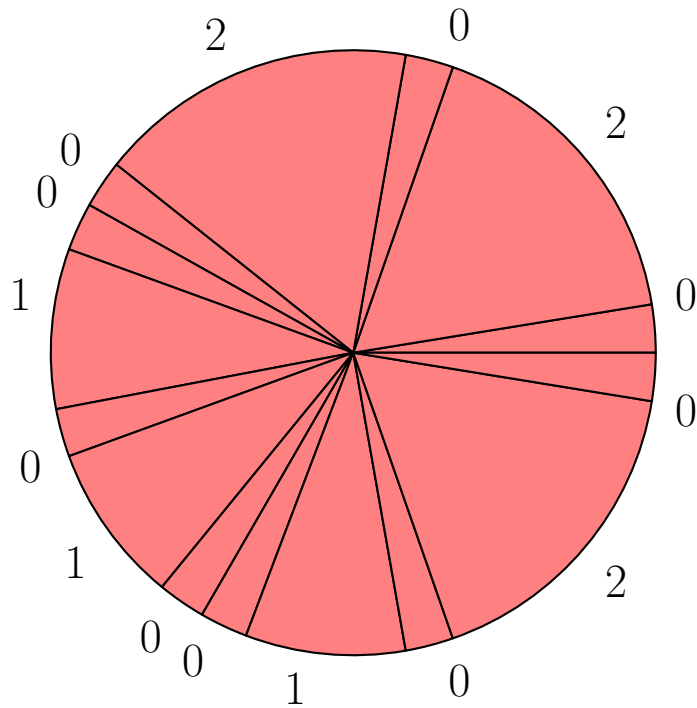
7. Mêmes question et stratégie pour $N = 7$.
8. Pour N impair quelconque, montrer que la stratégie consistant à suivre Bob assure à Alice au moins un tiers de la pizza, pourvu qu'elle choisisse bien la première part. On pourra d'abord "dessiner" la répartition finale obtenue en suivant une telle stratégie.
9. Pour $N = 9, 11, 13$, la stratégie précédente (suivre Bob) ne suffit pas pour assurer la moitié de la pizza à Alice. Essayer

de le vérifier sur un exemple ($N = 9$). Proposer des stratégies alternatives permettant à Alice d'atteindre la moitié, sur l'exemple précédent. On peut en fait montrer que de telles stratégies existent toujours pour $N = 9, 11, 13$.

10. Pour $N = 15$, on considère le découpage suivant (voir aussi les "vraies" pizzas sur le stand), où ε est un nombre positif très petit (celles et ceux qui acceptent des parts de taille nulle peuvent prendre $\varepsilon = 0$) :



ou



Montrer qu'Alice dispose d'une stratégie pour manger (environ) $\frac{4}{9}$ de cette pizza, mais qu'elle ne peut pas faire mieux.

11. Montrer que pour tout $N \geq 15$ impair, Bob peut trouver un découpage lui assurant au moins $\frac{5}{9}$ de la pizza !

Pour la culture : on peut démontrer que pour tout nombre impair $N \geq 15$, Alice peut toujours s'assurer $\frac{4}{9}$ de la pizza, quel que soit le découpage en N parts.