La monnaie de sa pièce

Si jamais vous souhaitez plus d'informations sur ce jeu, il est connu sous le nom de Sylver Coinage.

La fiche orange est volontairement trop longue, pour laisser du choix dans les parties à traiter (selon les préférences des participants·es ou celles des animateurs·ices) et donner du grain à moudre à un·e participant·e qui va vite ou en veut plus.

Propositions de plans à suivre :

Parcours 1
- Premiers essais
- Mauvais départs
- Fin de partie
- Un bon départ ? Un exemple

Parcours 2
- Premiers essais
- Mauvais départs
- Un bon départ, version théorique

Parcours 3
- Premiers essais
- Mauvais départs
- Fin de partie
- Plus grand nombre jouable après deux coups

Pour les scolaires du vendredi, nous recommandons le parcours 3.

Informations sur le matériel fourni :
Des jetons de pokers seront disponibles pour figurer des pièces, à chaque couleur on peut associer une valeur.

Vous aurez des règles en bois dont les cases sont numérotées. On peut placer des pions dessus pour visualiser quels nombres ont été éliminés.
On peut également s'en servir avec des petits pour faire des additions et des soustractions, en décalant un pion à droite ou à gauche du bon nombre de cases.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Premiers essais

J1 On obtient tous les nombres pairs. On ne peut obtenir aucun nombre impair.

J2 On peut donner un nombre que l'on peut obtenir avec 2 et 9 et demander à l'enfant de trouver comment l'obtenir.

J3,O1,B1 On ne peut plus éditer les pièces dont le montant est un multiple de 6, on peut éditer celles qui ne sont pas multiples de 6.

J4,O2,B2 Si Picsou fabrique des pièces de 2F, c'est une bonne idée de fabriquer des pièces de 3F. Aucune pièce n'est alors plus faisable, et Picsou a perdu !

J5,O3,B3 De même, si Picsou fabrique des pièces de 3F, en fabriquant des pièces de 2F on remporte la partie.

Nouvelles règles

J7 Les valeurs interdites sont tous les nombres pairs, car $2 = 6 - 4$.

J8 Les valeurs interdites sont tous les multiples de 3, car $3 = 9 - 6$. Pour 8 et 13, on constate que $5 \cdot 8 - 3 \cdot 13 = 1$, donc tous les entiers sont interdits.

J9 Laisser l'enfant chercher. On peut ensuite lui suggérer de faire deux colonnes, l'une en écrivant les mutiples successifs de 30 (ce qui fait compter de 3 en 3), l'autre en écrivant les multiples successifs de 77 (on rappellera qu'on peut à chaque fois enlever 3 et ajouter 80). Lorsqu'on tombe sur deux multiples qui diffèrent d'une unité, on obtient la solution : $18 \times 30 = 540$ et $7 \times 77 = 539$, d'où $18 \times 30 - 7 \times 77 = 1$.
On peut donc payer 1 en donnant 18 pièces de 30 et en recevant 7 pièces de 77. On peut aussi appliquer l'algorithme d'Euclide sous la forme suggérée dans l'énoncé : $77 - 2 \cdot 30 = 17$; $30 - 17 = 13$; $17 - 13 = 4$; $13 - 3 \cdot 4 = 1$, donc on peut payer 1. Pour trouver la formule explicite en fonction de 30 et 77, on remonte les lignes précédentes : $1 = 13 - 3 \cdot 4$; or $4 = 17 - 13$, donc en remplaçant, $1 = 13 - 3 \cdot (17 - 13) = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$; or $13 = 30 - 17$, donc en remplaçant, $1 = 4 \cdot (30 - 17) - 3 \cdot 17 = 4 \cdot 30 - 7 \cdot 17$; or $17 = 77 - 2 \cdot 30$, donc en remplaçant, $1 = 4 \cdot 30 - 7 \cdot (77 - 2 \cdot 30) = 18 \cdot 30 - 7 \cdot 77$.

J10 Il faut et il suffit que les deux entiers soient premiers entre eux (sans diviseur commun autre que 1).

J11 Il s'agit juste de généraliser la méthode utilisée à la question J6 : l'algorithme d'Euclide étendu (sans parler de division euclidienne, juste en soustrayant le bon nombre de fois le petit nombre au grand nombre). Le plus petit nombre que l'on peut payer est alors le pgcd (plus grand commun diviseur) des deux entiers choisis.

J12 Le second joueur a toujours la stratégie gagnante : quel que soit le choix du premier joueur, il suffit au second joueur de choisir un nombre sans facteur commun avec le choix du premier joueur. Un tel nombre existe toujours, par exemple il suffit d'ajouter 1 au nombre choisi par le premier...

Mauvais départs

O4, B4 Pour déterminer quels coups sont encore possibles une fois que 4 et 5 sont joués, on peut proposer de lister les premiers entiers (aller au moins jusqu'à 15) et de barrer ceux qu'on ne peut plus jouer, en essayant d'être méthodique et exhaustif · ve.

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots$$

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots$$

On voit facilement que 2,3,6,7,11 sont encore jouables (et pas 4,5,8,9,19,12,13,14,15,16). Il reste à justifier que les entiers plus grands ne sont pas jouables. Une façon simple de le dire : une fois qu'un nombre est exclu, tous les nombres obtenus en ajoutant 4 à celui-là, ou un multiple de 4, sont aussi exclus. Donc dès qu'on a barré 4 nombres successifs, tous les nombres entiers suivants sont exclus.

O5, B5 On sait déjà ce qu'il faut faire pour gagner si Picsou joue 2 ou 3 (répondre respectivement 3 et 2).

Si Picsou joue 6, on ne peut ensuite plus jouer ni 6 ni $11 = 6 + 5$, donc on répond 7, et Picsou, contraint de jouer 2 ou 3, va perdre.

De même, si Picsou joue 7 cela élimine des coups encore possibles 7 et $11 = 7 + 4$, on répond 6 et Picsou est coincé.

Enfin, si Picsou joue 11, il nous reste comme réponses possibles : 2,3,6 et 7. On évite 2 et 3. Si on joue 6, Picsou pourra faire 7 et on perdra. Si on joue 7, de même Picsou remportera la partie en jouant 6.

O6, B6 Jouer 5 après le début de partie avec 4F de Picsou n'est donc pas une bonne idée : si Picsou est malin, il jouera 11 et gagnera.

O7, B7 On aurait pu essayer de reprendre la méthode précédente, 4 et 6 ont été joués :

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, \ldots$$

mais ça coince parce qu'on ne peut exclure aucun nombre impair, la liste des coups jouables est donc infinie. Par contre, tous les nombres pairs, à part 2, sont exclus. En effet, comme 4 et 6 sont exclus, en ajoutant des multiples de 4 on exclut tous les nombres pairs.

O8, B7 Si Picsou joue 5 (après les premiers coups 4 et 6), il nous reste :

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots$$

c'est-à-dire (2,3) 7. En répondant 7, on s'assure la victoire.

O9, B7 C'est le même raisonnement si Picsou joue 7 : il ne reste que 2,3 et 5. En répondant 5 on gagne.

O10, B7 On peut suggérer de regrouper les nombres entiers quatre par quatre :

1	2	3	4
5	6	7	8
	...		
	...		
	...		

Quand Picsou joue un nombre impair, tous les nombres en-dessous de lui ne sont alors plus jouables (car obtenus en lui rajoutant un multiple de 4). On peut choisir de jouer en réponse le nombre impair restant dans la même ligne que celui joué par Picsou. Ne restent alors dans la partie que les lignes au-dessus de celle-ci.

On continue cette stratégie : Picsou joue un nombre impair, on joue l'autre nombre de la même ligne. C'est Picsou qui est obligé de jouer finalement dans la première ligne, c'est-à-dire de jouer 2 ou 3. Il aura perdu !

O11, B8 Il faut alors fabriquer des pièces de 4F ! Le jeu en est exactement au même point si les joueurs ont joué 4 puis 6 ou 6 puis 4.

Fin de partie

O12, B9 Si le premier joue 101, le deuxième 100, le premier 99, chacun un de moins que le précédent, la partie dure 100 coups. On peut faire des parties (pas très passionnantes) aussi longues que l'on veut.

O13, B10 Les nombres que l'on ne peut pas jouer au deuxième coup sont exactement les multiples de n, donc ce sont exactement les nombres dans la dernière colonne du tableau.

O14, B11 Parce qu'il suffit d'ajouter un multiple de n (pièce existante depuis le premier coup) au nombre déjà barré (donc déjà réalisé). Faire remarquer que deux nombres de la même colonne diffèrent d'un multiple de n.

O15, B12 Chaque coup joué permet de barrer (au moins) le nombre choisi et tous les nombres se situant sous ce nombre dans même colonne. Ainsi, à chaque coup, soit le nombre de coups encore jouables dans une colonne déjà entamée diminue strictement, soit on barre un nombre (et tous ceux situés en-dessous) dans une nouvelle colonne. Comme le nombre de colonnes est fini, et qu'une suite strictement décroissante d'entiers positifs est finie, on voit qu'au bout d'un nombre fini de coups, nous aurons barré toutes les cases du tableau. Donc le jeu a toujours une fin.

Plus grand nombre jouable après deux coups

O16 On trouve les résultats suivants (on peut donner deux ou trois couples à chaque binôme d'élèves et mettre leurs résultats en commun).
Pour $(2, 3)$, c'est 1 ; pour $(2, 5)$, c'est 3 ; pour $(2, 7)$, c'est 5 ; pour $(3, 4)$, c'est 5 ; pour $(3, 5)$, c'est 7, pour $(3, 7)$, c'est 11 ; pour $(4, 5)$, c'est 11, pour $(4, 7)$, c'est 17.

O17 On peut conjecturer que le plus grand nombre encore jouable après deux coups (a, b) premiers entre eux vaut $ab - a - a = (a - 1)(b - 1) - 1$. On vérifie par exemple que cette conjecture est valable dans les exemples cités plus haut.

Un bon départ ? Version théorique

O18 Deux nombres sont dans la même colonne si et seulement si la différence est un multiple de 5.

O19 Les différences positives possibles entre deux nombres distincts de la liste $\{b, 2b, 3b, 4b, 5b\}$ sont exactement b, $2b$, $3b$ et $4b$. D'où le résultat avec la question précédente.

O20 Comme b n'est pas multiple de 5, son dernier chiffre peut-être 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ou 9. Alors $2b$ se termine par 2, 4, 6, ou 8 (c'est un nombre pair non multiple de 5) en multipliant par 2 les derniers chiffres possibles de b. De même, $3b$ se termine par 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 ou 9. Enfin, $4b$ se termine par 2, 4, 6 ou 8.

O21 En regardant les derniers chiffres obtenus à la question précédente, on voit donc b, $2b$, $3b$ et $4b$ ne se terminent jamais par 0, ni par 5. Donc ils ne sont jamais multiples de 5. Cela contredit la question 19, donc l'hypothèse avant la question 19 est impossible. Donc b, $2b$, $3b$, $4b$ et $5b$ sont tous dans des colonnes différentes.

O22 Par la question précédente, après les coups $(5, b)$, au moins un nombre dans chaque colonne est barré. Par la question 14, il ne reste donc qu'un nombre fini de nombres jouables dans chaque colonne, donc un nombre fini de coups possibles après $(5, b)$.

O23 Par la question 21, la colonne possédant le premier nombre barré le plus bas est la colonne contenant $4b$. En particulier, les nombres $4b$, $4b - 1$, $4b - 2$, $4b - 3$, $4b - 4$ (situés dans 5 colonnes distinctes) sont barrés (et donc tous les suivants également). En revanche, $4b - 5$ est situé juste au-dessus du premier nombre barré de sa colonne, il n'est donc pas barré. Et par construction, c'est le plus grand coup encore jouable. Donc $t = 4b - 5 = 4(b - 1) - 1 = (5 - 1)(b - 1) - 1$, ce qui est également la valeur prévue par la conjecture de la question 17.

O24 À partir du nombre s, on peut ajouter des multiples de 5 (et donc descendre dans la colonne de s) jusqu'à arriver au dernier nombre non barré de cette colonne (qui est $b - 5$, $2b - 5$, $3b - 5$ ou $4b - 5$). Si on arrive à $t = 4b - 5$, c'est terminé. Sinon, il suffit d'ajouter b, $2b$ ou $3b$ pour arriver à t. Dans tous les cas, on obtient t à partir de s en ajoutant d'abord des multiples de 5, puis des multiples de b.

O25 Sous les hypothèses de l'énoncé, le premier joueur peut donc revenir en arrière et choisir le nombre s au lieu du nombre t lors de son deuxième choix. Dans ce cas, le premier joueur se trouve exactement dans la même situation que Picsou dans la situation gagnante évoquée dans la question 24 (les nombres barrés après $(5, b, s)$ sont exactement les mêmes qu'après $(5, b, t, s)$, grâce à la question 24. Dans la suite du jeu, pour remporter la victoire, il suffit donc que le premier joueur joue exactement comme Picsou aurait joué en suivant sa stratégie gagnante initiale. On parle de vol de stratégie.

O26 C'est le premier joueur qui a la stratégie gagnante si le premier coup est 5 : après $(5, b)$, soit le choix de t est gagnant pour le premier joueur, soit il est perdant et dans ce cas, Picsou a une stratégie gagnante en jouant s. Dans ce second cas, la stratégie pour le premier joueur est de jouer s à son deuxième coup. Dans tous les cas, en suivant cette stratégie non constructive, le premier joueur gagne ; en revanche, on ne peut pas expliciter la stratégie à suivre...

Un bon départ ? Un exemple

O27 Le plus grand nombre jouable, en suivant la conjecture de la question 17 (ou en barrant explicitement les nombres déjà atteints), est $t = (5-1)(6-1)-1 = 19$. Après les deux premiers coups, voici les nombres encore disponibles :

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\ldots$$

On suppose donc que le premier joueur joue 19 à son deuxième coup. Il reste donc les nombres suivants :

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\,.$$

Étudions tous les coups possibles pour Picsou lors de son prochain tour :

- si Picsou joue 2 (resp. 3), le premier joueur gagne en jouant 3 (resp. 2).
- si Picsou joue 4, il reste
  $$2, 3, 4, 5, 6, 7, \,.$$
  Donc le premier gagne en jouant 7.
- si Picsou joue 7, il reste
  $$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,.$$
  Alors le premier joueur gagne en jouant 4.
- si Picsou joue 8, il reste
  $$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,.$$
  Alors le premier joueur gagne en jouant 9 (les deux coups suivants étant nécessairement $(4, 7)$ ou $(7, 4)$).
- si Picsou joue 9, il reste
  $$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\,.$$
  Alors le premier joueur gagne en jouant 8 (les deux coups suivants étant nécessairement $(4, 7)$ ou $(7, 4)$).
- si Picsou joue 13 (resp. 14), alors le premier joueur joue 14 (resp. 13) et il reste
  $$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,.$$
  Pour son troisième coup, si Picsou joue 4 (resp. 7), le premier joueur gagne en jouant 7 (resp. 4) ; si Picsou joue 8 (resp. 9), le premier joueur gagne en jouant 9 (resp. 8).

O28 Le plus grand nombre jouable est 23, et les nombres restants sont :

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\ldots$$

Montrons que si le premier joueur joue 8 lors de son deuxième coup, il gagne. Dans ce cas, il reste alors les nombres :

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\,.$$

Ensuite, si Picsou joue 4 (resp. 6), le premier joueur gagne en jouant 6 (resp. 4) ; si Picsou joue 9 (resp. 11), le premier joueur gagne en jouant 11 (resp. 9).

En particulier, jouer $t = 23$ lors de son deuxième coup est perdant pour le premier joueur, puiqu'alors Picsou peut lui voler la stratégie précédente en jouant 8 lors de son deuxième coup.

Ainsi, après $(5, 6)$, le plus grand coup possible (19) est gagnant, alors qu'après $(5, 7)$, le plus grand coup possible (23) est perdant.

B13, B14, B15, B16 Il s'agit d'adapter les preuves des questions O18 à O26 qui traitent le cas $a = 5$, à l'aide du lemme de Gauss.

B13 On range les entiers dans un tableau avec a colonnes, et on regarde les multiples de b : b, $2b$,… $(a-1)b$, ab sont chacun dans une colonne différente (il y en a un et un seul par colonne). En effet, cela vient du lemme de Gauss. Si deux d'entre eux étaient dans la même colonne, leur différence, qui serait un kb avec $1 \leqslant k \leqslant a-1$, serait un multiple de a ce qui est exclu.

Le plus grand nombre qui n'est pas encore barré est donc celui juste au-dessus de $(a-1)b$, c'est-à-dire $t = (a-1)b - a = ab - a - b$.

B14 Si a, b (premiers entre eux, ni 2 ni 3) ont été joués, et qu'on joue un troisième coup $s < t$ ($t = ab-a-b$, montrons que t n'est plus un coup jouable ensuite. Si s est dans la même colonne que t, c'est clair. Sinon, ce s est au-dessus du dernier nombres barré dans sa colonne, donc au-dessus de l'un des b, $2b$,… $(a-2)b$. En ajoutant un multiple de b à ceux-là, on atteint la colonne de t, et plus exactement le nombre juste sous t (qui est $(a-1)b$). Donc en partant de s et en ajoutant le bon multiple de b, on atteint aussi un nombre qui est dans la colonne de t, strictement au-dessus de $(a-1)b$, donc un nombre qui élimine t.

B15 Picsou joue a, vous jouez b, Picsou joue la plus grande valeur possible restante $t = ab - a - b$. On la suppose non gagnante pour Picsou. Vous disposez alors d'un coup gagnant s. D'après la question B14, Picsou aurait pu le jouer (au lieu de t), et ça aurait aussi éliminé t des coups encore jouables pour vous. Jouer s ou jouer t puis s amènent à la même configuration de jeu. Si jouer t n'est pas gagnant pour Picsou, jouer s l'est.

B16 Picsou joue a, vous jouez b. Si la plus grande valeur encore jouable $t = ab - a - b$ est gagnante pour Picsou, il n'y a rien à démontrer. Sinon, supposons qu'il joue le coup (perdant) t. C'est vous qui avez un coup gagnant s en réponse (parce que si jamais aucun de vos coups n'est gagnant, ça veut dire que quoi que vous fassiez à ce tour, Picsou aurait une réponse qui lui permettrait de gagner, donc son t aurait été un coup gagnant). D'après la question B15, Picsou aurait pu jouer s à la place de t, qui est gagnant après que a, b ont été joués.