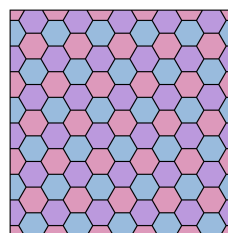
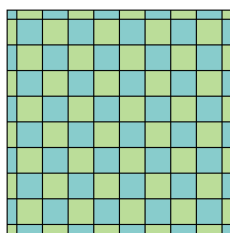
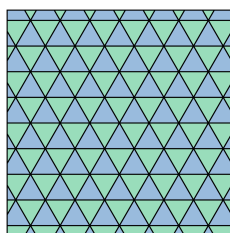


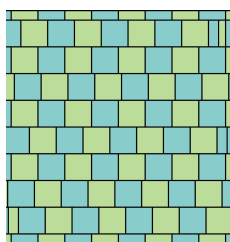
■ Premiers pavages ■

J1,J2,J3,O1,B1 On a un triangle équilatéral, un carré, un pentagone régulier, un hexagone régulier, un heptagone régulier et un octogone régulier. On peut laisser essayer de manipuler les polygones pour voir lesquels peuvent paver le plan. Pour les plus jeunes, cela suffit. À partir de la 5^e, proposer de calculer les angles de ces polygones si l'idée ne vient pas. Pour un polygone régulier à n côtés, on peut tracer toutes les diagonales et regarder l'angle au centre qui est $\frac{360}{n}$ et en utilisant la somme des angles dans un triangle, on obtient que l'angle cherché est de $180 - \frac{360}{n} = 180(1 - 2/n)$.

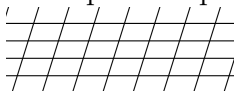
Ainsi le triangle permet de paver (angle 60° , on peut en mettre 6 en un sommet), le carré aussi (angle 90° , 4 en un sommet), le pentagone d'angle 108° ne permet pas de faire un pavage (108 ne divise pas 360), on peut placer 3 hexagones d'angle 120° autour d'un sommet et on ne peut pas avec des polygones réguliers à plus de côtés.



Avec l'hexagone on ne pourra réaliser qu'un pavage. Par contre, différents arrangements sont possibles avec les carrés ainsi que les triangles. Par exemple on peut décaler :

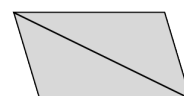


O2,J4 Au plus simple :

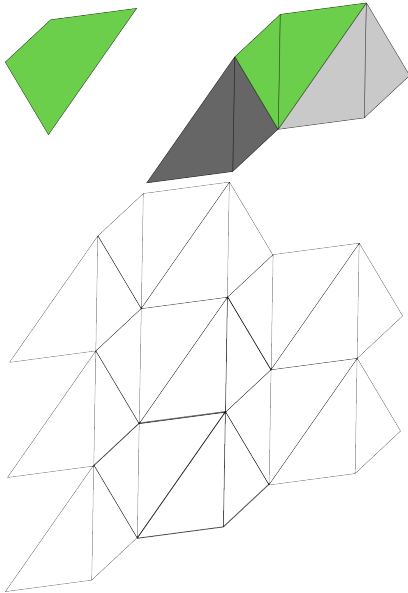


O3,J5,B2

Avec deux copies d'un triangle quelconque, on peut construire un parallélogramme (le quadrilatère obtenu est bien un parallélogramme par égalité des longueurs des côtés opposés), puis à l'aide de la question précédente on peut paver avec ces parallélogrammes.



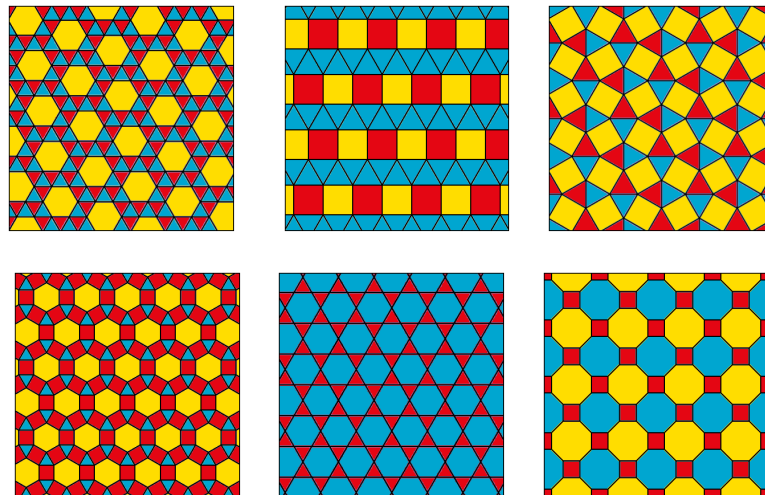
B3 On peut encore faire apparaître des parallélogrammes.



Partons d'un quadrilatère quelconque, en vert sur la figure. On trace une de ses diagonales, faisant apparaître deux triangles. En répétant l'idée de la question précédente, avec deux copies du quadrilatère on complète les deux triangles en des parallélogrammes (un vert et gris clair, et vert et gris foncé). On obtient un pavage avec deux types de parallélogrammes.

O4,J6,B4 Les tampons fournis sont : hexagones réguliers, carrés et triangles rectangles, ayant tous des côtés de même longueur. En considérant leurs angles ($120=360/3$, $90=360/4$, $60=360/6$), on peut voir quels assemblages sont possibles. On peut aussi se contenter de faire des essais.

Voici par exemple des pavages semi-réguliers que l'on peut faire :



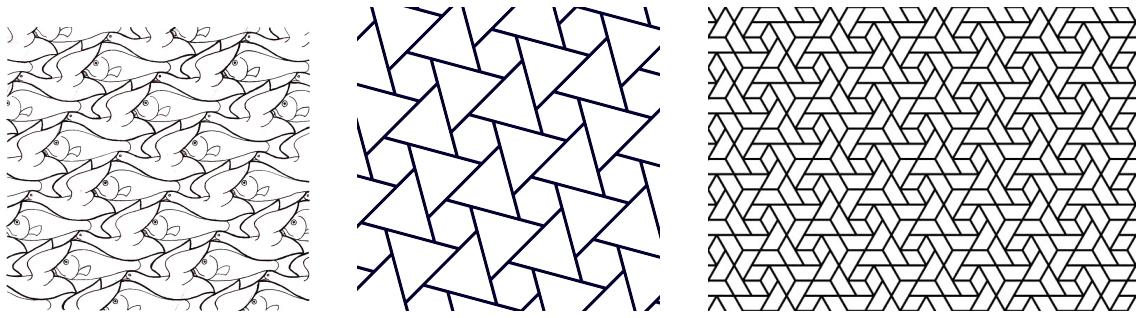
Pour que les couleurs ne se mélangent pas trop, essayez de faire respecter les couleurs d'encre prévues pour chaque tampon ! Merci !

■ Qui est périodique ? ■

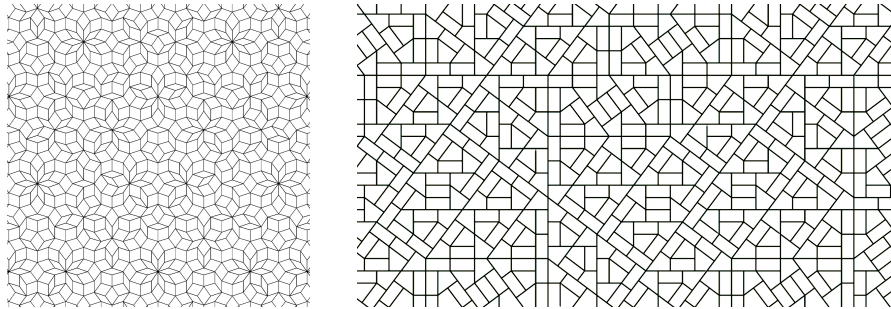
O5,J7,B5 La question est très libre. On peut penser aux jours de la semaine, mois de l'année, aux saisons... un *périodique* est une publication (journal, magazine...) qui paraît à intervalles réguliers. Les battements cardiaques sont périodiques.

O6,J8,B6 Des pavages imprimés sont disponibles et les mêmes reproduits sur des transparents permettent de visualiser l'existence ou non de translations laissant le pavage invariant. Vous pouvez parler de décalage ou de translation, dire qu'on garde les bords du transparent parallèles à ceux de l'image de départ, on ne fait pas de rotation.

Les trois pavages suivants sont périodiques :



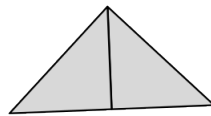
Les deux pavages ci-dessous ne le sont pas :



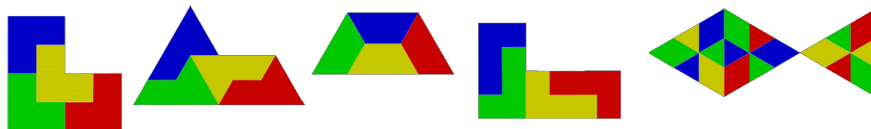
O7 Il en faut 2 (au moins 2 translations de vecteurs non colinéaires).

■ Le vertige des reptuiles ■

O8,J9 Tout simplement :



O9, J10, J11,B7 Des exemplaires plastifiés sont fournis pour assembler les polygones ensemble. Voici des solutions :

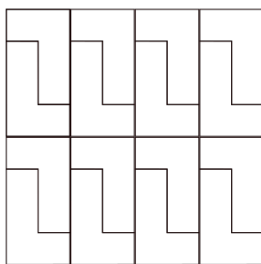


Pour la deuxième forme ci-dessus, il faut retourner une pièce (la bleu foncé sur l'image).

O10,J12,B8 On continue, de la même manière, on combine ces formes plus grandes pour en faire d'encore plus grandes. Pour les participantes et participants qui connaissent le principe, on peut parler de récurrence.

O11,B9 Ces pavages ne sont pas périodiques. En effet, s'il existe une translation de vecteur non nul qui laisse ce pavage invariant, alors il existe une grande forme de la reptuile qui est plus grande que ce décalage (tel qu'il y a des points de la grande reptuile dont l'image par la translation reste dans la grande reptuile). Cette grande reptuile a donc des parties similaires, que l'on peut superposer. Comme cette grande forme est semblable aux plus petites, les reptuiles plus petites ont la même propriété. Comme le premier assemblage de reptuile n'a pas cette propriété, le pavage ne peut pas être périodique.

On peut néanmoins construire d'autres pavages avec les mêmes tuiles, qui eux sont périodiques. Par exemple :



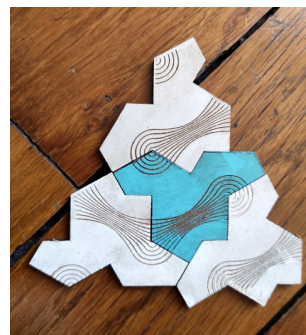
■ Le T-shirt ■

On savait depuis longtemps qu'il existait des systèmes de plusieurs tuiles permettant de paver le plan, de sorte que tout pavage réalisé avec ces tuiles soit apériodique (par exemple : les pavages de Penrose ou ceux de Robinson). Une question était de savoir si c'était possible avec une seule tuile ; ce problème était connu sous le nom de « ein Stein » (une tuile, en allemand) ou « Einstein » (avec un jeu de mots).

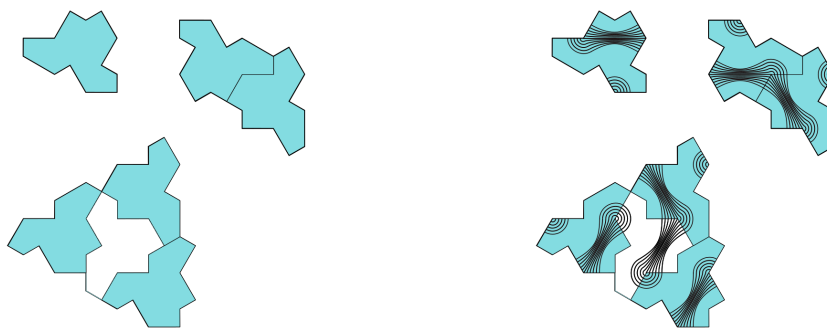
En mars 2023, donc tout récemment, David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan, et Chaim Goodman-Strauss ont découvert cette tuile qui permet de réaliser des pavages (en autorisant à retourner la tuile de temps en temps), qui sont tous apériodiques. Les mêmes auteurs ont proposé en mai 2023 une autre tuile qui répond de manière encore plus satisfaisante à la conjecture, car il n'y a pas besoin d'autoriser les réflexions, qu'ils appellent *spectre* (on ne la présente pas ici, elle n'est plus polygonale mais s'obtient comme une déformation de celle de mars).

Une étude précise est un peu trop compliquée pour être présentée ici. On ne propose ici ni de démontrer que la tuile permet de paver ni que les pavages obtenus sont apériodiques, mais de voir un peu comment réaliser des pavages « T-shirt » de jouer avec ces tuiles.

Matériel fourni : des tuiles de bois, avec un côté blanc et un côté bleu. Les lignes tracées dessus sont décoratives et aident un peu à assembler les tuiles ensemble.



O12,B10 Les formes sont proposées en taille réelle pour pouvoir réaliser le puzzle avec les tuiles de bois dessus.

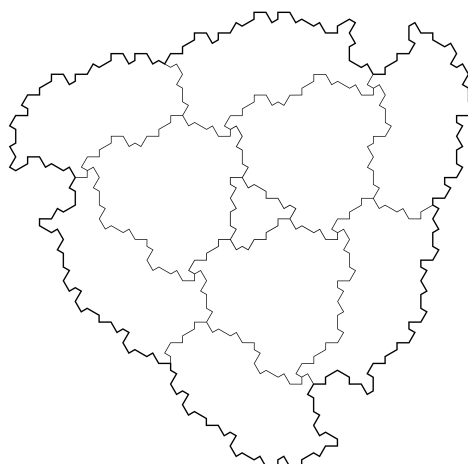


Pour le super H, mettre au centre une tuile côté blanc et l'entourer de trois bleues. Pour les autres, n'utiliser que des tuiles bleues.

O13,B11 Les formes sont proposées en taille réelle pour pouvoir réaliser le puzzle avec des supertuiles en papier directement dessus.

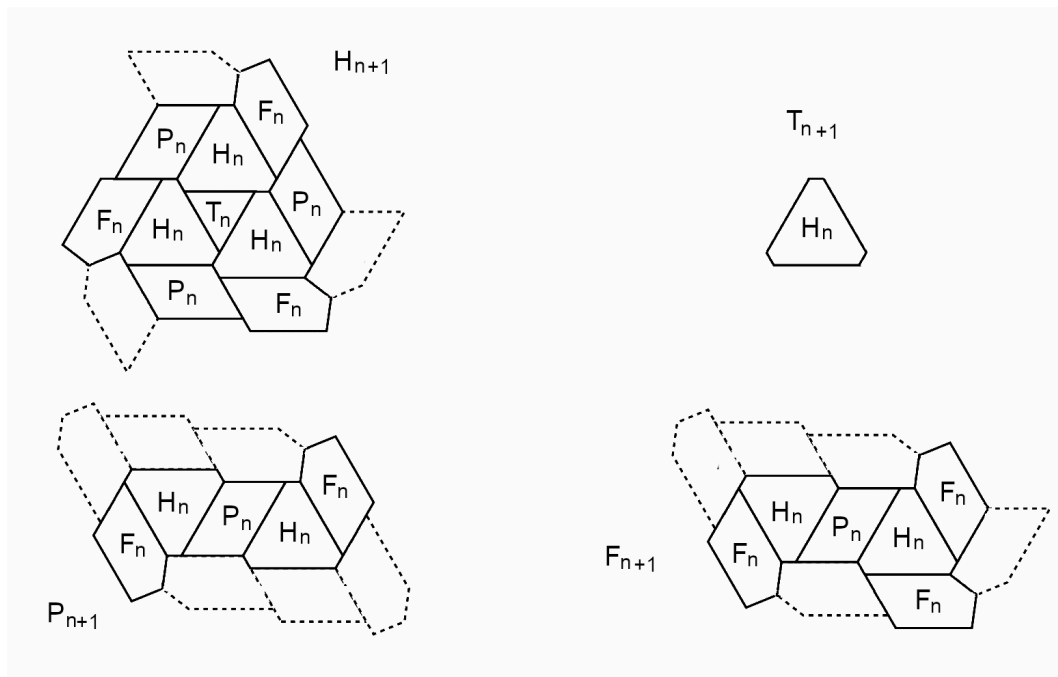


O14,B12 Pour faire la gigatuile H, des méga tuiles sont fournies déjà assemblées, avec les « bords » sur transparent afin de voir à travers. La gigatuile H s'obtient ainsi (elle n'est pas reproduite à la même échelle que les méga tuiles précédentes, pour un gain de place) :



Les « bords » ajoutés aux supertuiles se superposent, mais uniquement sur des tuiles de base. En réalisant le pavage, on pourrait donc enlever ces tuiles, cela ne pose pas de problème.

À chaque étape $n + 1$, on construit 4 assemblages de tuiles H_{n+1} , P_{n+1} , F_{n+1} , T_{n+1} à l'aide des assemblages H_n , P_n , F_n , T_n . La méthode de construction est toujours la même. Grossièrement, si on schématise en simplifiant les bords, les assemblages sont les suivants :



Comme les assemblages H_n , P_n , F_n , T_n ne sont pas invariants par rotation (contrairement à leur version simplifiée), il faut bien choisir comment les orienter pour passer à l'étape $n + 1$. Cette difficulté est cachée par l'aspect puzzle choisi dans les fiches, les bords imposent ces choix.

On peut montrer que, si on les normalise en taille, ces suites de polygones convergent (pour la distance de Hausdorff) grâce à un théorème de point fixe.

Pour mieux comprendre ces agencements de tuiles, vous pouvez tester un peu sur : <https://cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/app.html>

La démonstration que les tuiles T-shirt pavent effectivement le plan utilise ces agencements. Une méthode (un peu désagréable) pour démontrer l'apériodicité est de commencer par montrer que tout pavage obtenu fait nécessairement apparaître ces agencements à différentes échelles (avec beaucoup de disjonctions de cas) pour en déduire, un peu comme avec les reptuiles, qu'ils ne peuvent pas être périodiques.

Les prépublications sur ces tuiles pavant apériodiquement le plan sont sur arxiv, si jamais le sujet vous intéresse et que vous voulez plus d'informations, c'est ici :

- An aperiodic monotile
- A chiral aperiodic monotile