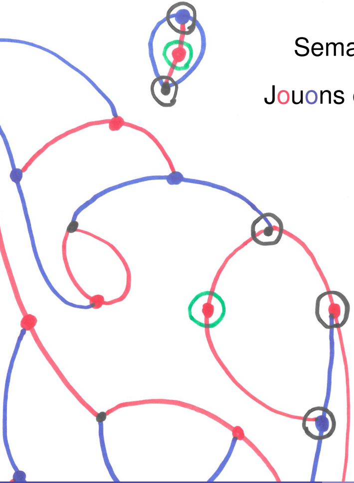
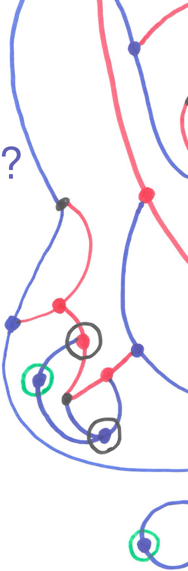
Savez-vous compter les choux ?





Semaine des mathématiques 2019

Jouons ensemble aux mathématiques !

Mathilde Herblot

Université Paris Diderot

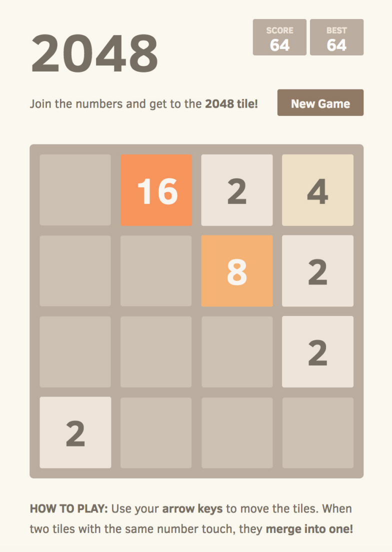
11 mars 2019

des exemples de jeux mathématiques

des exemples de jeux mathématiques

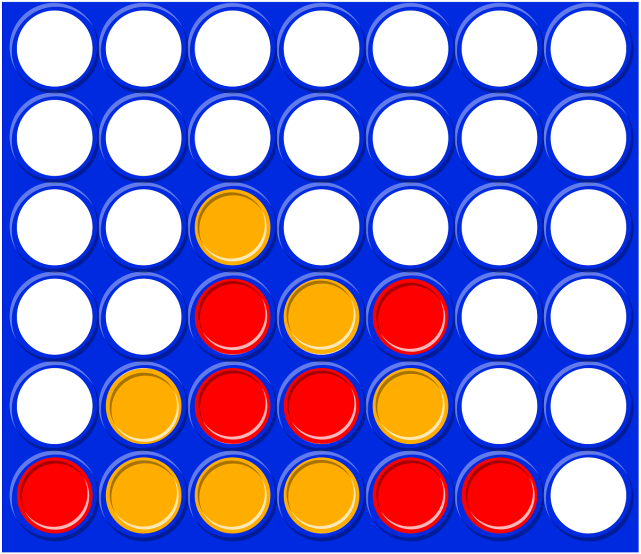
5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

des exemples de jeux mathématiques



des exemples de jeux mathématiques

des exemples de jeux mathématiques



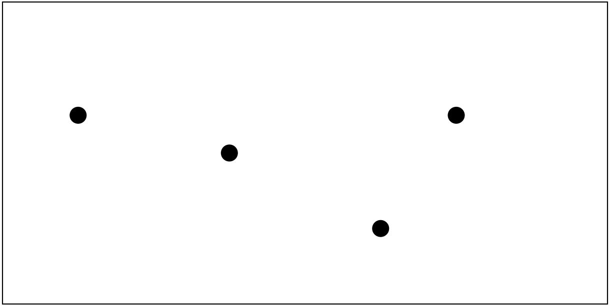
des exemples de jeux mathématiques

des exemples de jeux mathématiques

des exemples de jeux mathématiques

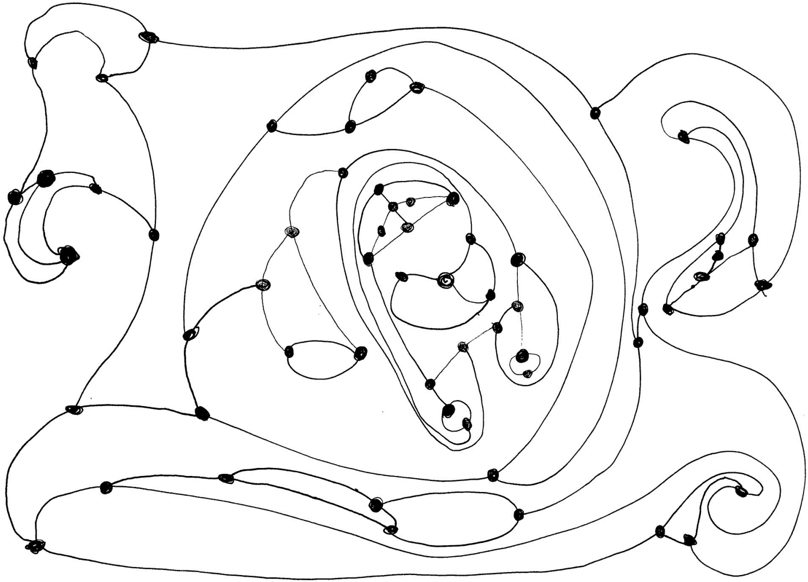
Règles du jeu

Placer des points sur une feuille.



- relier deux points avec une ligne et placer un nouveau point sur cette ligne.
- les lignes ne doivent jamais se croiser,
- d'un même point ne peuvent pas partir plus de 3 lignes.

Exemple



Questions

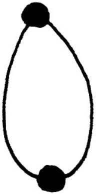
- Les parties ont-elles toujours une fin ?
- Comment bien jouer ?
- Peut-on savoir qui va gagner ?

Avec un seul point

début premier coup

Avec un seul point

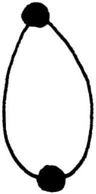
début



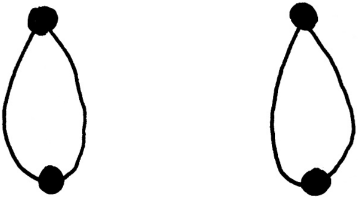
premier coup

Avec un seul point

début

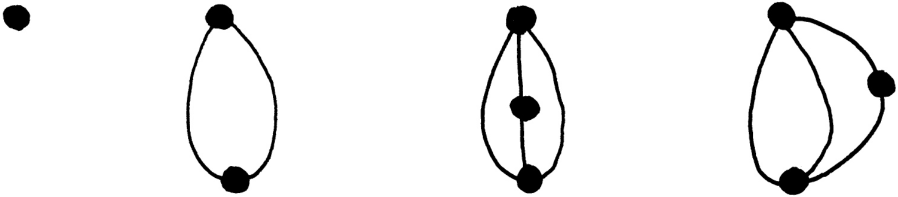


premier coup



deuxièmes coups possibles

Avec un seul point



début premier coup deuxièmes coups possibles

Le premier joueur a perdu, le deuxième joueur a gagné.

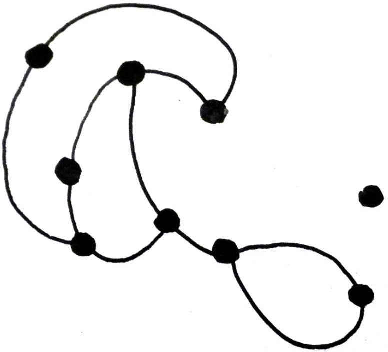
Degrés de liberté

Au début, les points ont 3 *degrés de liberté* : de chacun pourraient éventuellement partir 3 lignes.
Quand on trace une ligne partant d'un point ou y arrivant, il perd un degré de liberté.

Degrés de liberté

Au début, les points ont 3 *degrés de liberté* : de chacun pourraient éventuellement partir 3 lignes.

Comptons les degrés de liberté :

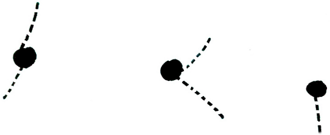


Parties longues

- On place 4 points sur la feuille, il y a $3 \times 4 = 12$ degrés de liberté.

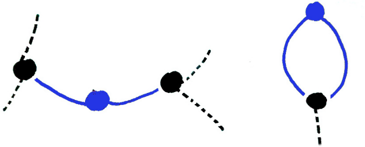
Parties longues

- On place 4 points sur la feuille, il y a $3 \times 4 = 12$ degrés de liberté.
- À chaque coup joué,



Parties longues

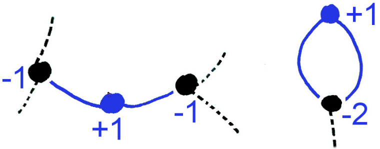
- On place 4 points sur la feuille, il y a $3 \times 4 = 12$ degrés de liberté.
- À chaque coup joué,



Parties longues

- On place 4 points sur la feuille, il y a $3 \times 4 = 12$ degrés de liberté.

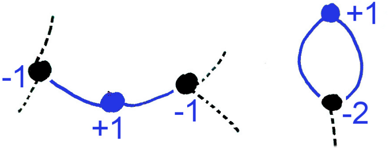
- À chaque coup joué,



le nombre de degrés de liberté diminue de 1.

Parties longues

- On place 4 points sur la feuille, il y a $3 \times 4 = 12$ degrés de liberté.
- À chaque coup joué,



le nombre de degrés de liberté diminue de 1.

Après 11 coups, on ne peut plus jouer !

Théorème

Une partie avec n points au départ dure au plus coups.

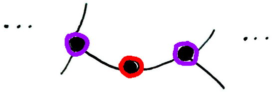
Exemple de partie la plus longue possible

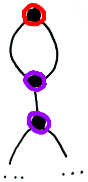
Parties courtes, coloriage

À la fin d'une partie,

- des points à 0 degré de liberté,
- des points à 1 degré de liberté,
- pas de points à 2 ni 3 degrés de liberté.

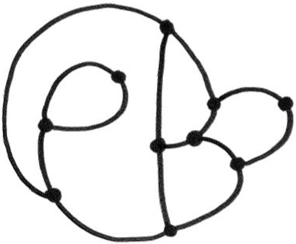
On entoure en rouge les points qui ont encore un degré de liberté, en violet ses deux voisins. On laisse en blanc les autres points.





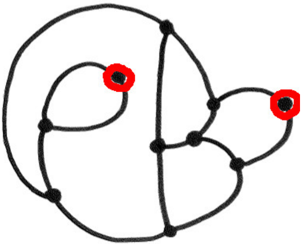
Quand le point rouge est sur une boucle, on va chercher un peu plus loin le voisin suivant.

Exemples de coloriage



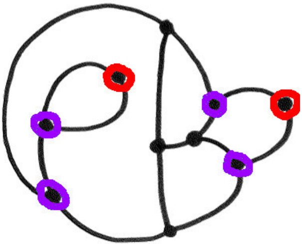
nombre de...						
points au départ n	coups joués k	points au total p	points rouges r	points violets v	points blancs b	$3r + b$
3	7	10				

Exemples de coloriage



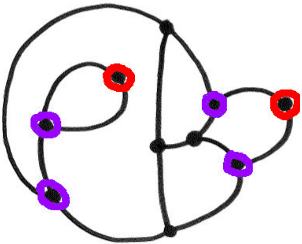
nombre de...						
points au départ n	coups joués k	points au total p	points rouges r	points violets v	points blancs b	$3r + b$
3	7	10				

Exemples de coloriage



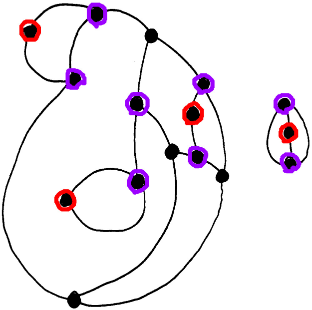
nombre de…						
points au départ n	coups joués k	points au total p	points rouges r	points violets v	points blancs b	$3r + b$
3	7	10				

Exemples de coloriage



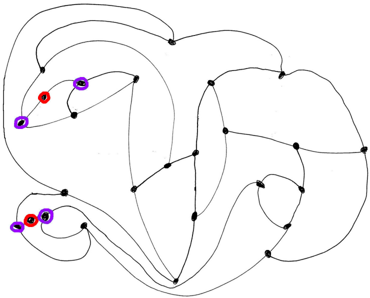
nombre de…						
points au départ n	coups joués k	points au total p	points rouges r	points violets v	points blancs b	$3r + b$
3	7	10	2	4	4	

Exemples de coloriage



nombre de...						
points au départ n	coups joués k	points au total p	points rouges r	points violets v	points blancs b	$3r + b$
3	7	10	2	4	4	
5	11	16	4	8	4	

Exemples de coloriage

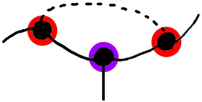


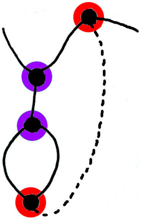
nombre de…						
points au départ n	coups joués k	points au total p	points rouges r	points violets v	points blancs b	$3r + b$
3	7	10	2	4	4	
5	11	16	4	8	4	
7	19	26	2	4	20	

Comptons les points

Le nombre total de points p

- $p = n + k$
- $p = r + v + b$
  Il y a exactement deux fois plus de points violets que de points rouges.
  Si deux points rouges partageaient un voisin commun :





pas possible !
$p = r + v + b = 3r + b$.

$$n + k = 3r + b$$

Comptons les degrés de liberté

$$n + k = 3r + b$$

- nombre total de degrés de liberté : r.
- Il vaut $3n$ au début de la partie
  diminue de 1 à chaque coup joué,
  à la fin $3n - k$.

$$r = 3n - k$$

$$n + k = 3r + b$$

durée d'une partie

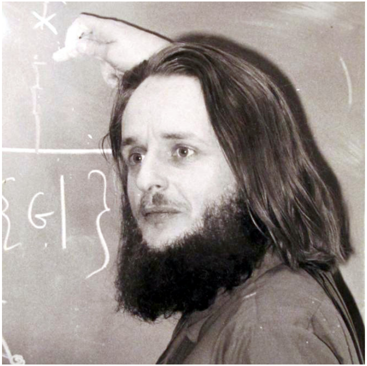
Théorème

Une partie à n points dure entre $2n$ et $(3n - 1)$ coups.

Exemple de partie la plus courte possible

Mais d'où vient ce jeu ?

Début des années 1960, inventé par les mathématicien et informaticien anglais John H. Conway et Mike Paterson à Cambridge.



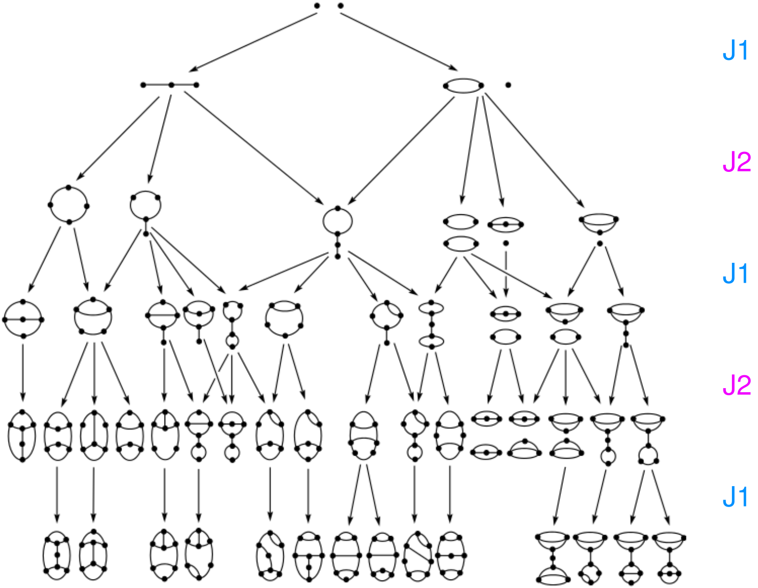
John Horton Conway (1937–)

photo 1969

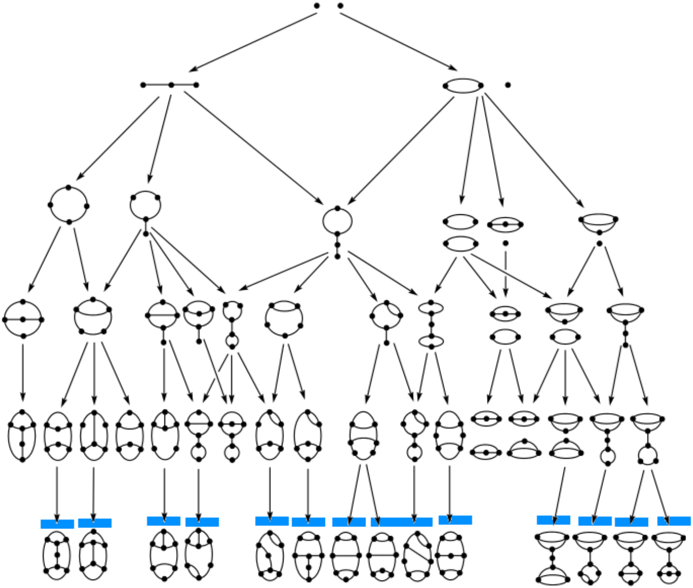
Michael Stewart Paterson (1942–)

photo 1963 par John Breeze

stratégies gagnantes



stratégies gagnantes



J1

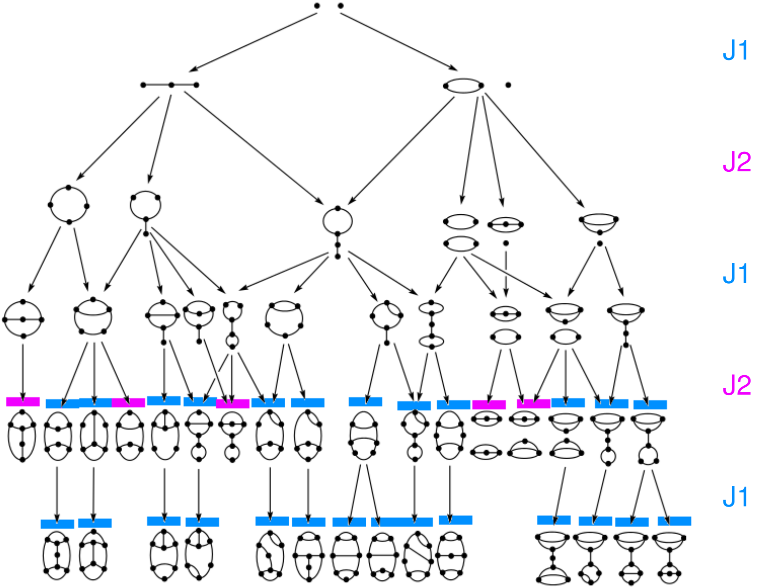
J2

J1

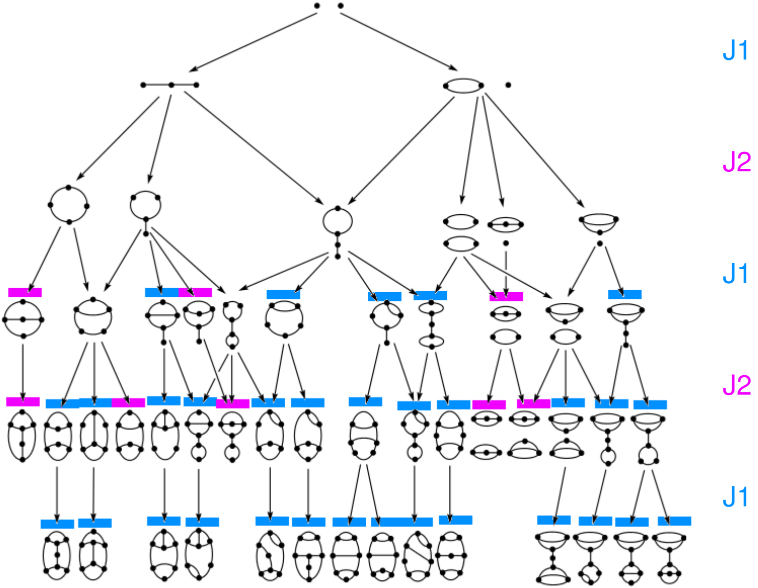
J2

J1

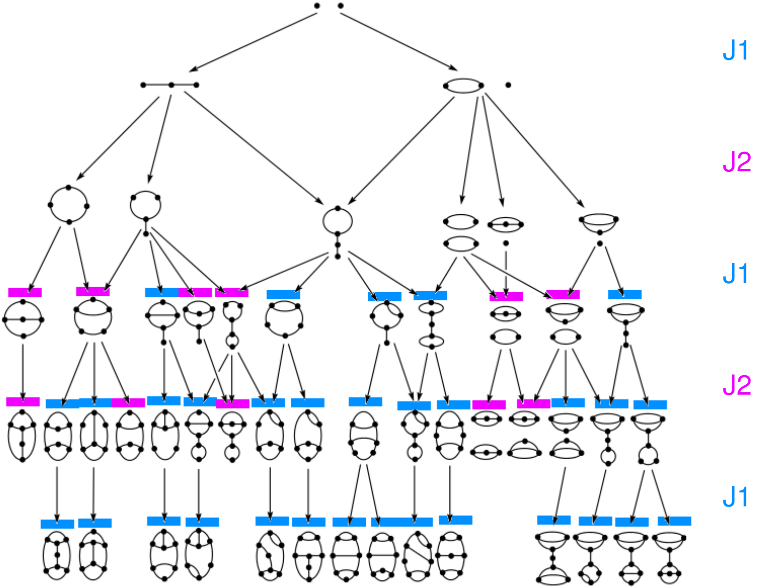
stratégies gagnantes



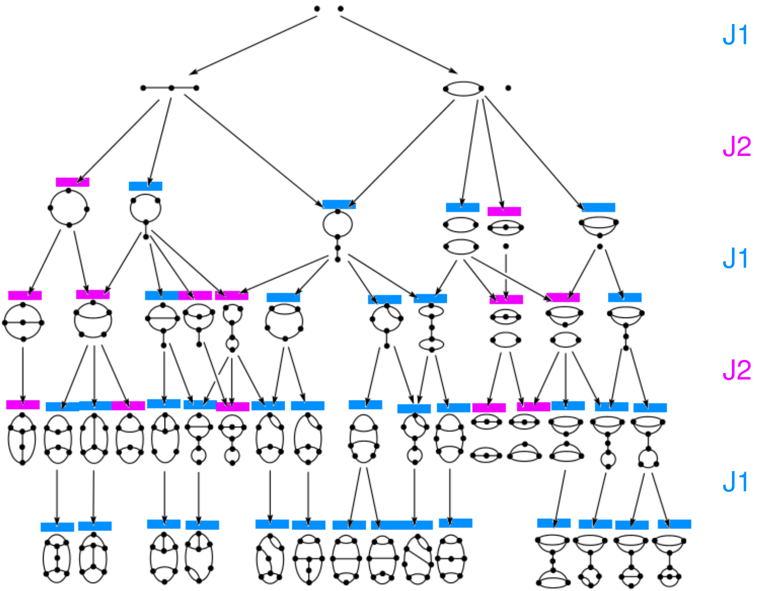
stratégies gagnantes



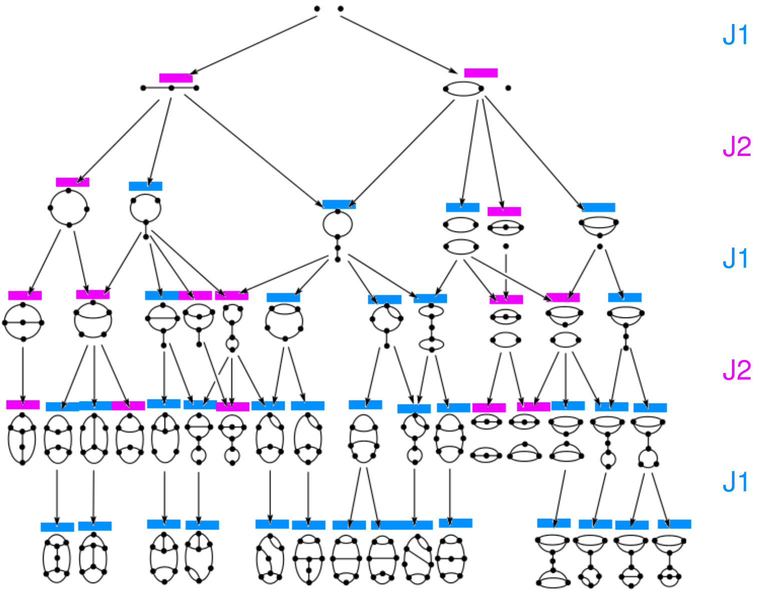
stratégies gagnantes



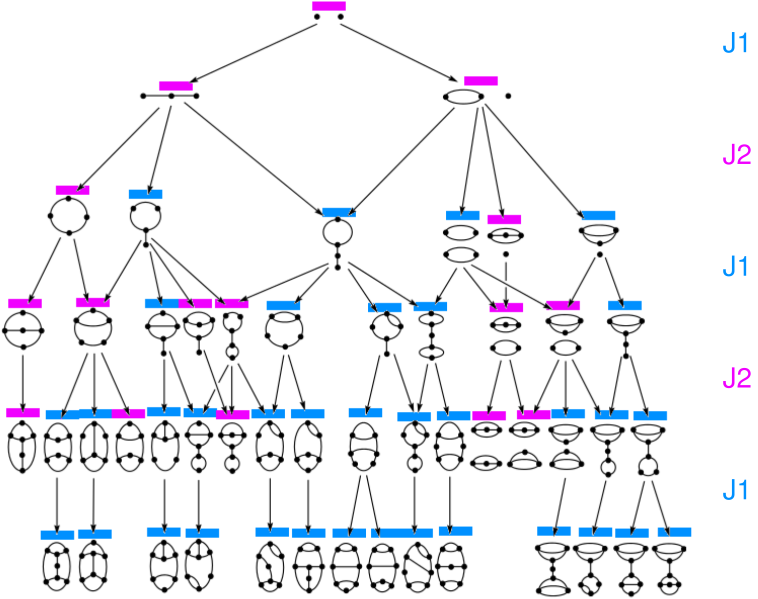
stratégies gagnantes



stratégies gagnantes



stratégies gagnantes



conjecture

Théorème

Au début du jeu, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

(Mais on ne la connaît pas. . .)

conjecture

Théorème

Au début du jeu, l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

(Mais on ne la connaît pas...)

Conjecture

Notons n le nombre de points au départ, et r le reste de sa division par 6.

- Si r est égal à 0,1 ou 2,
  le deuxième joueur a une stratégie gagnante.
- Si r est égal à 3,4 ou 5,
  le premier joueur a une stratégie gagnante.

recherches. . .

Julien Lemoine, Simon Viennot, 2011.

COMPUTER ANALYSIS OF SPROUTS WITH NIMBERS 9

be winning or losing. We had implemented it in our program at first, and rather quickly, a large number of positions with several lands was saturating our databases, preventing us from improving the results of [1] of more than 2 or 3 spots.

As described below, the concept of *nimber* can solve this problem, allowing us to compute the lands separately.

6.3. **Nimber theory.** A more detailed view of this theory can be found, amongst others, in [2].

Definition. *The nimber of a position P is denoted by $|P|$, and is defined as the smallest non-negative integer that is not a nimber of a child of P.*

This definition implies that $|P| = 0$ if P is losing, and $|P| \geq 1$ if P is winning. We can also see that, if we know the complete game tree of P, we can recursively compute $|P|$, but in fact it is not necessary to expand the complete game tree to compute the nimber of a position, as the algorithm 2 shows below.

The main result of the nimber theory can be stated as follows:

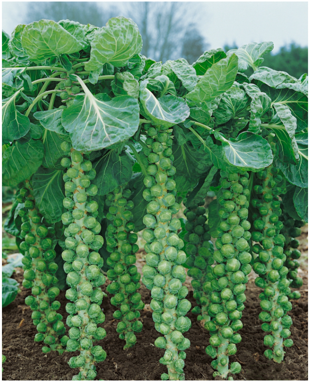
Theorem. *If a position P is made of two independent positions P_1 and P_2, then $|P|$ is the "bitwise exclusive or" of $|P_1|$ and $|P_2|$, denoted by $|P_1| \wedge |P_2|$.*

For example, $|$`1AB.}AB.}]!`$| = 3$ and $|$`22.}]!`$| = 1$, so
$|$`1AB.}AB.}]22.}]!`$| = 3 \wedge 1 = 2$.

6.4. **Couples.** In our program, instead of computing the outcome of a position, we compute the outcome of a *couple*: (position+nimber), which represents the sum of

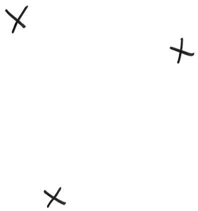
Variantes

- Misère, ou qui-perd-gagne
- Jeu des choux de Bruxelles



Règles du jeu

Placer des croix sur une feuille.



- relier deux extrémités avec une ligne et placer un nouveau trait sur cette ligne.
- les lignes ne doivent jamais se croiser.

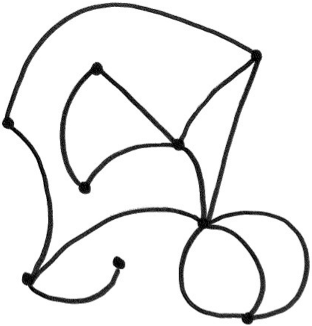
Comment savoir qui va gagner ?

Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$

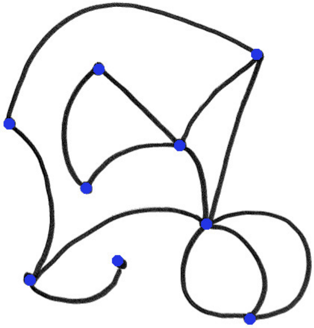


Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$



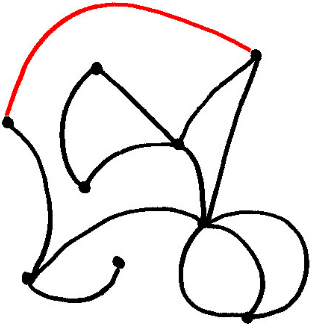
sommets

Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$



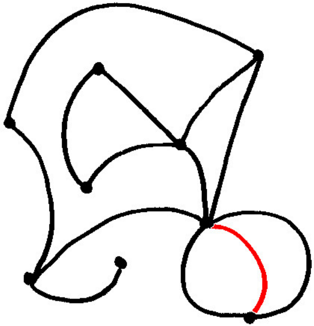
arêtes

Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$



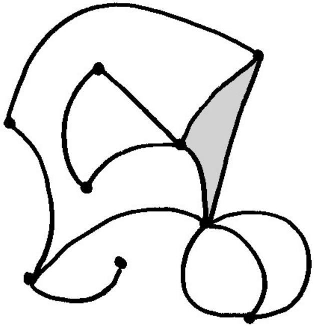
arêtes

Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$



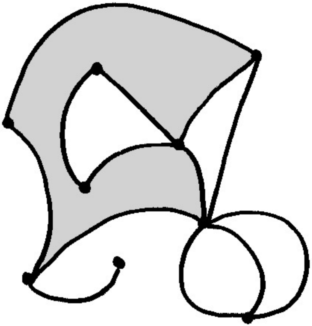
faces

Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$



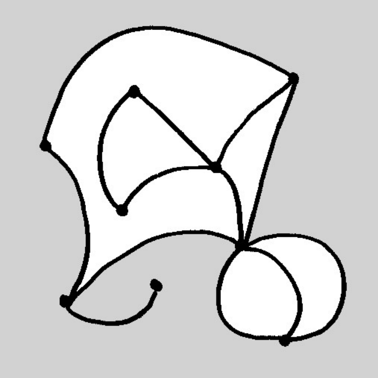
faces

Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$



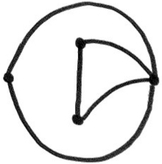
faces

Caractéristique d'Euler

Théorème

Le nombre de sommets s, d'arêtes a et de faces f d'un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$

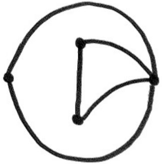
		
$s =$ $a =$ $f =$	$s =$ $a =$ $f =$	$s =$ $a =$ $f =$

Caractéristique d’Euler

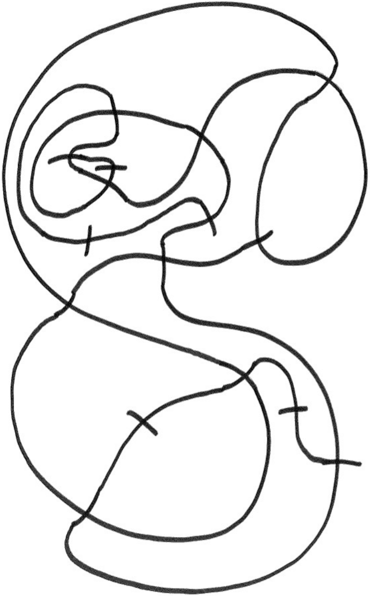
Théorème

Le nombre de sommets s, d’arêtes a et de faces f d’un graphe planaire connexe vérifie la relation

$$s - a + f = 2.$$

		
$s = 4$	$s = 4$	$s = 5$
$a = 4$	$a = 5$	$a = 7$
$f = 2$	$f = 3$	$f = 4$

Explication

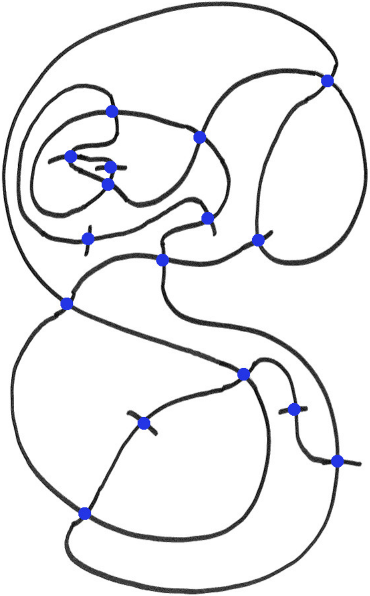


s sommets
a arêtes
f faces

$$s - a + f = 2$$

$s =$
$a =$
$f =$

Explication

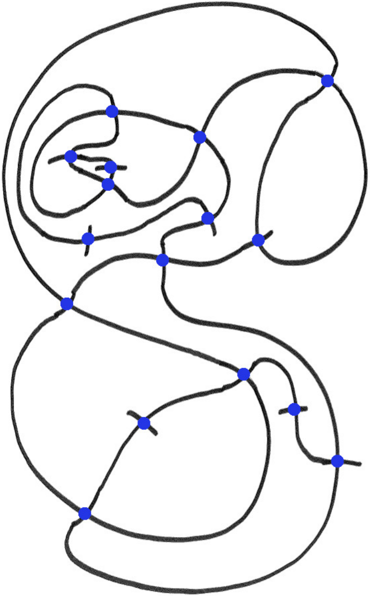


s sommets
a arêtes
f faces

$$s - a + f = 2$$

$s = 3 + k$
$a =$
$f =$

Explication

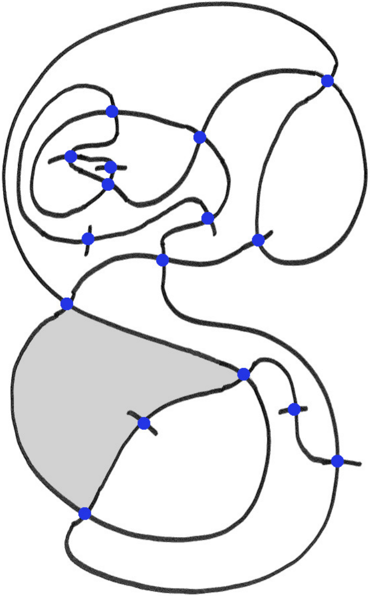


s sommets
a arêtes
f faces

$$s - a + f = 2$$

$s = 3 + k$
$a = 2k$
$f =$

Explication

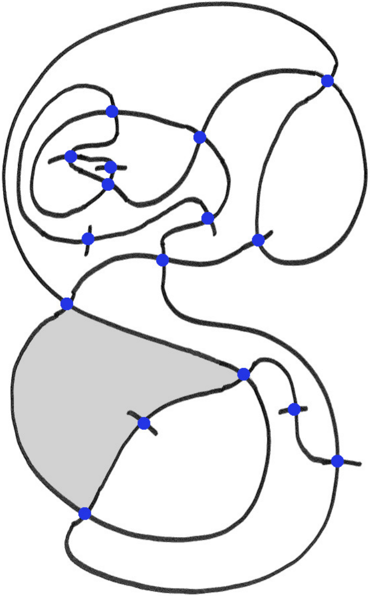


s sommets
a arêtes
f faces

$$s - a + f = 2$$

$s = 3 + k$
$a = 2k$
f = nb de petits traits

Explication

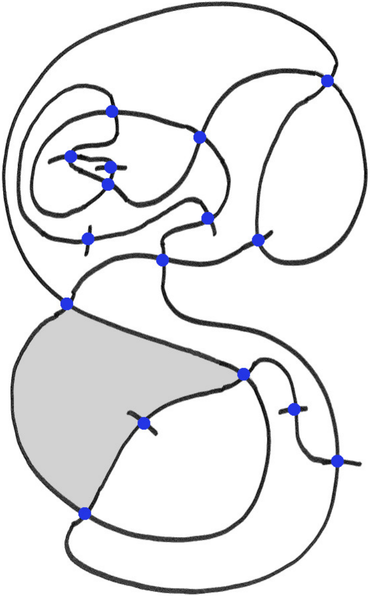


s sommets
a arêtes
f faces

$$s - a + f = 2$$

$s = 3 + k$
$a = 2k$
f = nb de petits traits

Explication

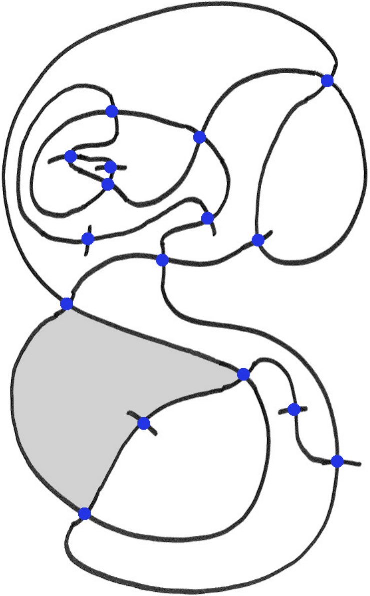


s sommets
a arêtes
f faces

$$s - a + f = 2$$

$s = 3 + k$
$a = 2k$
f = nb de petits traits = 12

Explication



s sommets
a arêtes
f faces

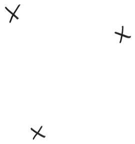
$$s - a + f = 2$$

$s = 3 + k$
$a = 2k$
f = nb de petits traits = 12

$$(3 + k) - (2k) + 12 = 2$$

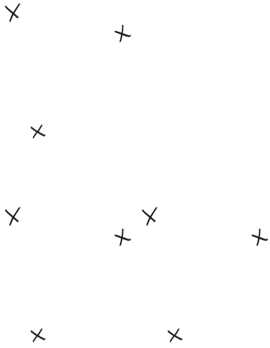
$$k = 13$$

Bilan



3 croix au départ,
la partie finit en 13 coups
le premier joueur gagne !

Bilan



3 croix au départ,
la partie finit en 13 coups
le premier joueur gagne !

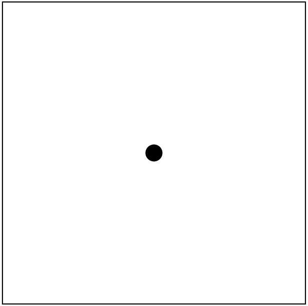
Un nombre n quelconque de croix au départ,
la partie se déroule en $(5n - 2)$ coups.

- Si n est pair, le deuxième joueur gagne.
- Si n est impair, le premier joueur gagne.

Le choix des coups joués n'a aucune importance !

Démonstration du théorème sur la caractéristique d’Euler

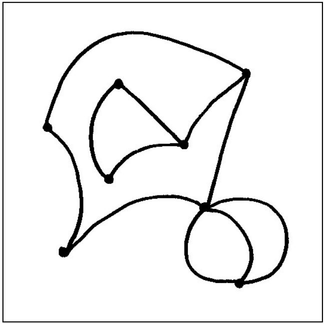
On imagine qu’on construit notre graphe (planaire et connexe) petit à petit.
Au début,



$s = 1, \; a = 0, \; f = 1$
$s - a + f = 2$

Démonstration du théorème sur la caractéristique d'Euler

On imagine qu'on construit notre graphe (planaire et connexe) petit à petit.
Au début, $s - a + f = 2$

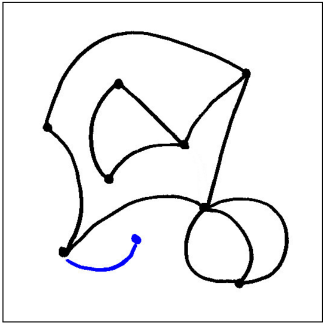


Ensuite, on rajoute soit :

- un nouveau sommet et une arête pour le relier à notre graphe,
- soit une arête entre deux sommets existants,
- soit une arête partant et revenant au même sommet.

Démonstration du théorème sur la caractéristique d’Euler

On imagine qu’on construit notre graphe (planaire et connexe) petit à petit.
Au début, $s - a + f = 2$

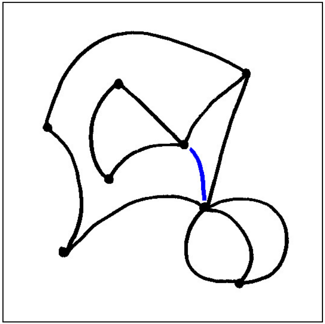


Ensuite, on rajoute soit :

- un nouveau sommet et une arête pour le relier à notre graphe,
  $s \rightsquigarrow +1 \qquad a \rightsquigarrow +1 \qquad f \rightsquigarrow +0$
- soit une arête entre deux sommets existants,
- soit une arête partant et revenant au même sommet.

Démonstration du théorème sur la caractéristique d'Euler

On imagine qu'on construit notre graphe (planaire et connexe) petit à petit.
Au début, $s - a + f = 2$

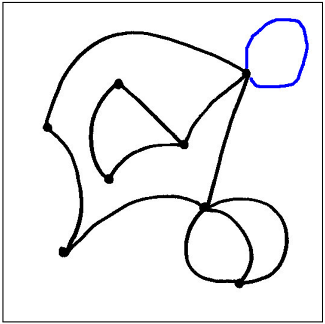


Ensuite, on rajoute soit :

- un nouveau sommet et une arête pour le relier à notre graphe,
  $s \rightsquigarrow +1 \qquad a \rightsquigarrow +1 \qquad f \rightsquigarrow +0$
- soit une arête entre deux sommets existants,
  $s \rightsquigarrow +0 \qquad a \rightsquigarrow +1 \qquad f \rightsquigarrow +1$
- soit une arête partant et revenant au même sommet.

Démonstration du théorème sur la caractéristique d'Euler

On imagine qu'on construit notre graphe (planaire et connexe) petit à petit. Au début, $s - a + f = 2$

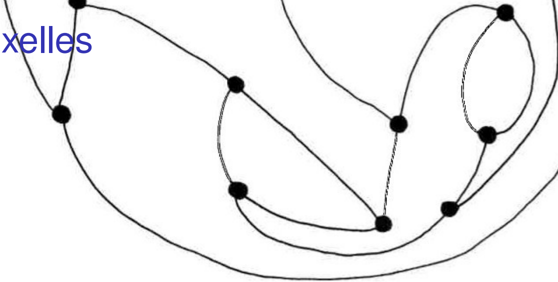


Ensuite, on rajoute soit :

- un nouveau sommet et une arête pour le relier à notre graphe,
  $s \rightsquigarrow +1$ $\quad a \rightsquigarrow +1$ $\quad f \rightsquigarrow +0$
- soit une arête entre deux sommets existants,
  $s \rightsquigarrow +0$ $\quad a \rightsquigarrow +1$ $\quad f \rightsquigarrow +1$
- soit une arête partant et revenant au même sommet.
  $s \rightsquigarrow +0$ $\quad a \rightsquigarrow +1$ $\quad f \rightsquigarrow +1$

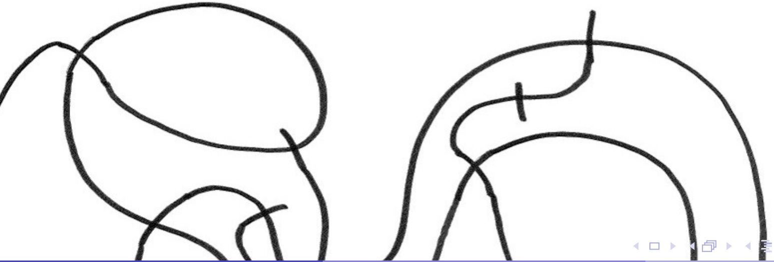
Conclusion : $s - a + f$ ne change jamais et vaut toujours 2.

Choux VS choux de Bruxelles

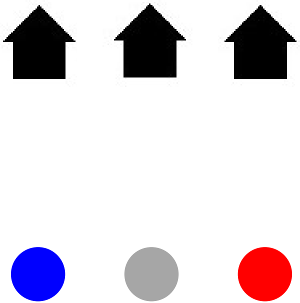


Les mathématiques permettent de mieux comprendre le jeu des choux de Bruxelles. . .

. . .qui n'a plus d'intérêt pour les joueurs !



L'énigme des trois maisons



Relier chacune des 3 maisons à l'eau, à l'électricité et au gaz, sans que les canalisations ne se croisent.

Merci pour votre attention et votre participation !

Pour me contacter : herblot@math.univ-paris-diderot.fr