La cryptographie et ses secrets

Mathilde Herblot
herblot@math.univ-paris-diderot.fr

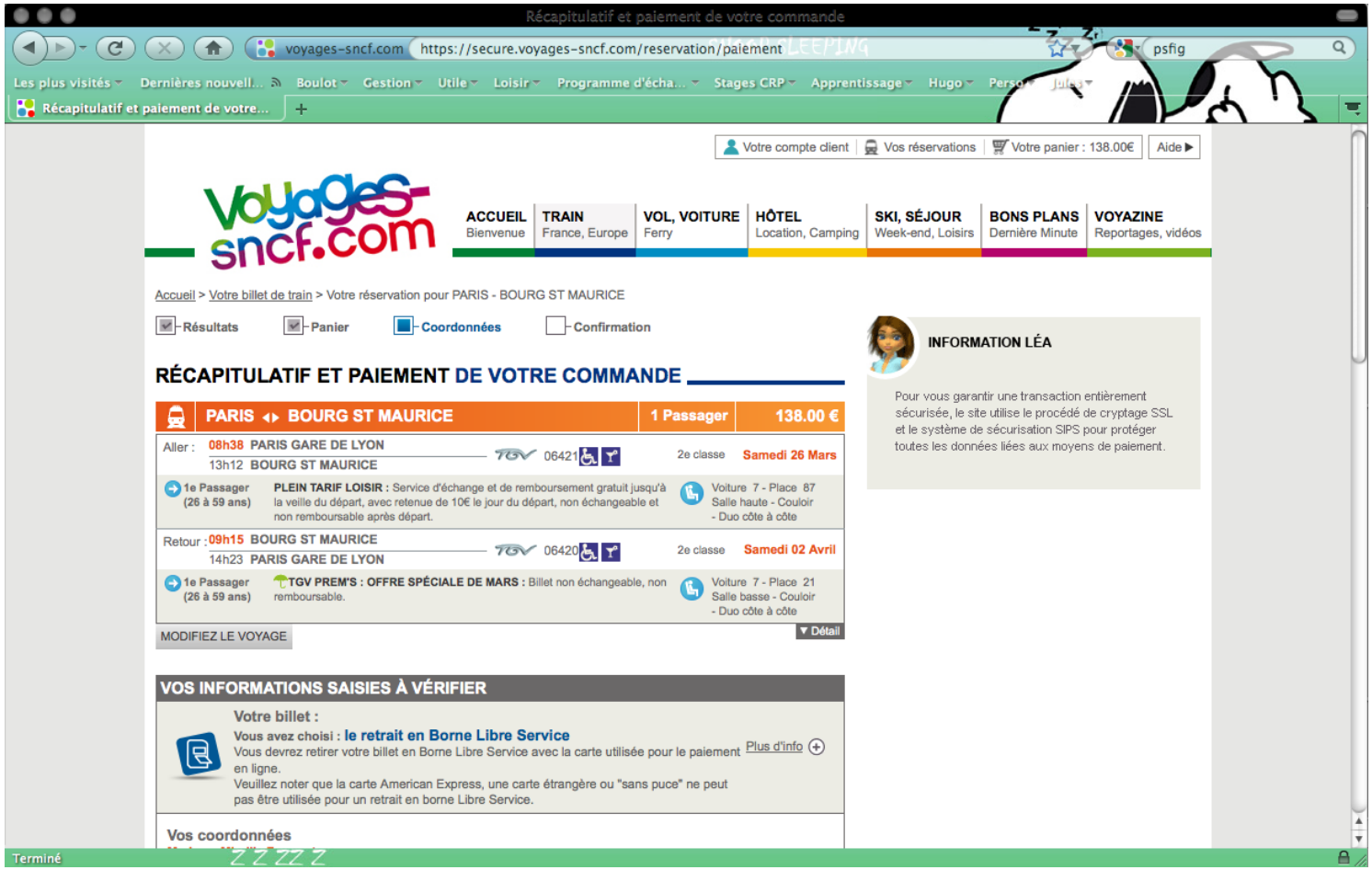
Université Paris Diderot

1er mars 2017

Cartes à puce

- Confidentialité des données contenues sur les cartes
- Lecture sans contact
- Vérification de la validité de l'abonnement

Paiements en ligne, e-commerce



Clé de voiture

Secrets d'États, secrets militaires

Petit historique de la cryptographie

Plus vieil exemple connu : au XVI^{e} siècle avant J.-C., en Mésopotamie (Irak actuel), une tablette d'argile sur laquelle est gravée la recette secrète d'un potier.

Scytale

Chiffre de César

Méthode utilisée par Jules César dans ses correspondances secrètes.

Décalage des lettres de l'alphabet.
Par exemple, décalage de 4 : on remplace A par E, B par F, C par G...

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓																								
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D

Décalage de E.

Combien de chiffrements différents possibles ?

Chiffre de César

Méthode utilisée par Jules César dans ses correspondances secrètes.

Décalage des lettres de l'alphabet.
Par exemple, décalage de 4 : on remplace A par E, B par F, C par G...

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓																								
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D

Décalage de E.

Combien de chiffrements différents possibles ? 25

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

Remarque : il suffit de savoir comment une lettre de l'alphabet est transformée pour connaître les transformations de toutes les lettres.

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

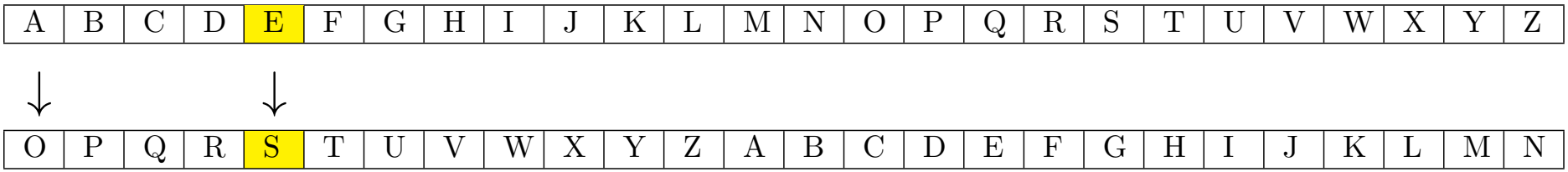
Remarque : il suffit de savoir comment une lettre de l'alphabet est transformée pour connaître les transformations de toutes les lettres.

Nombre de S : 5

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H



C'est le décalage de O. Décryptons :

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
				↓														↓							
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

C'est le décalage de O. Décryptons :

P

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
				↓										↓											
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

C'est le décalage de O. Décryptons :

P R

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓				↓																					
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

C'est le décalage de O. Décryptons :

P R E

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓				↓																					
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

C'est le décalage de O. Décryptons :

P R E M

Chiffre de César, à l'attaque !

Texte chiffré, décalage inconnu :

D F S A W S F A O F G R S I L A W Z Z S R W L G S D H

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓				↓																					
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

C'est le décalage de O. Décryptons :

P R E M I E R M A R S D E U X M I L L E D I X S E P T

Permutation

Au lieu de décaler l'alphabet, on peut mélanger complètement les lettres.

Par exemple :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓																								
R	J	M	X	A	F	U	I	B	E	Z	G	N	P	O	W	L	C	Y	S	V	D	T	H	K	Q

On dit qu'on fait une *permutation* des lettres de l'alphabet.

Combien de tels chiffrements ?

Permutation

Au lieu de décaler l'alphabet, on peut mélanger complètement les lettres.

Par exemple :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓																								
R	J	M	X	A	F	U	I	B	E	Z	G	N	P	O	W	L	C	Y	S	V	D	T	H	K	Q

On dit qu'on fait une *permutation* des lettres de l'alphabet.

Combien de tels chiffrements ?

$26 \times 25 \times 24 \times \cdots \times 2 \times 1 \simeq 4 \cdot 10^{26} = 400\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

Permutation

Au lieu de décaler l'alphabet, on peut mélanger complètement les lettres.

Par exemple :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
↓	↓																								
R	J	M	X	A	F	U	I	B	E	Z	G	N	P	O	W	L	C	Y	S	V	D	T	H	K	Q

On dit qu'on fait une *permutation* des lettres de l'alphabet.

Combien de tels chiffrements ?

$26 \times 25 \times 24 \times \cdots \times 2 \times 1 \simeq 4 \cdot 10^{26} = 400\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

Mais on sait comment l'attaquer !

Chiffre de Vigenère

Blaise de Vigenère
(1523-1596)

Clé : un « mot », par exemple : `MATHS`.
On la répète suffisamment de fois pour recouvrir le message clair.

```
C E C I E S T T R E S S E C R E T
M A T H S M A T H S M A T H S M A
```

Chiffre de Vigenère

Blaise de Vigenère
(1523-1596)

Clé : un « mot », par exemple : `MATHS`.
On la répète suffisamment de fois pour recouvrir le message clair.

```
C E C I E S T T R E S S E C R E T
M A T H S M A T H S M A T H S M A
O E V P W E T M Y W E S X J J Q T
```

Chiffre de Vigenère

Blaise de Vigenère
(1523-1596)

Clé : un « mot », par exemple : MATHS.
On la répète suffisamment de fois pour recouvrir le message clair.

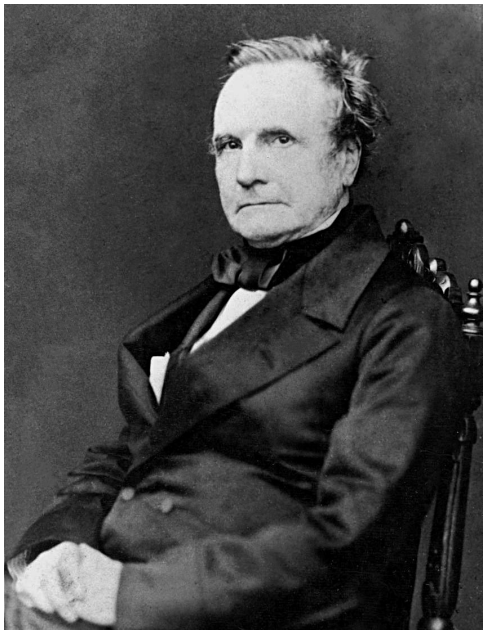
C	E	C	I	E	S	T	T	R	E	S	S	E	C	R	E	T
M	A	T	H	S	M	A	T	H	S	M	A	T	H	S	M	A
O	E	V	P	W	E	T	M	Y	W	E	S	X	J	J	Q	T

Avantages :

- une même lettre n'est pas toujours chiffrée de la même façon.
- la cryptanalyse fréquentielle ne marche pas.

Considéré comme sûr pendant 300 ans.

Charles Babbage

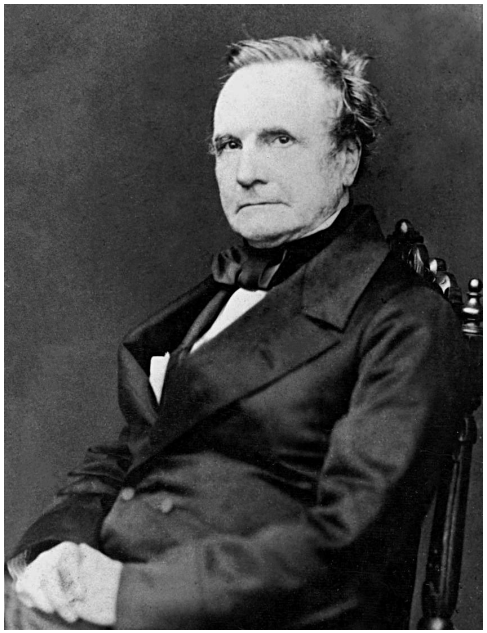


Charles Babbage
(1791-1871)

Idée : On cherche des séquences de lettres qui se répètent plusieurs fois dans le chiffré :

- hasard ?
- même (bout de) mot chiffré avec le même morceau de clé ?

Charles Babbage



Charles Babbage
(1791-1871)

Idée : On cherche des séquences de lettres qui se répètent plusieurs fois dans le chiffré :

- hasard ?
- même (bout de) mot chiffré avec le même morceau de clé ?

Dans le deuxième cas, cela signifie que la distance qui sépare ces deux *occurrences* du même (bout de) mot est un multiple de la longueur de la clé !

Exemple

KETVI YGPNU FNZIE EWPUY PFNUF NJVFD JSEPE JHPSR KYSDF UOAXD
ERVIG PUESF LOKOO SBNII OAUVR KPMEM JGTSS AODEK WUCPN MKYOF
SVIZI YOUJQ AIEEM JCGXW OVTLK XPUDI EFIUL FQAXJ VMEJS VESAJ
UTUYU EMBTN IPRJF MUHFR OFDKP FDVDA ZMPNF TTXEE IDBLK QFNUT
TATJD FGOXX IEVSE AWFMF OTKRB NHMEZ ISRFM EJYDA UJOTR FPSPD
AMUAV DUTIG FFUDG YDUOF SUVUE TJNUR JLTFN YYJVS BIZHF GSBVK
WEAOH EXWQO VSLKW DLBTS KWTUQ FROIV RFT

Exemple

KETVI YGPNU FNZIE EWPUY PFNUF NJVFD JSEPE JHPSR KYSDF
UOAXD ERVIG PUESF LOKOO SBNII OAUVR KPMEM JGTSS AODEK WUCPN
MKYOF SVIZI YOUJQ AIEEM JCGXW OVTLK XPUDI EFIUL FQAXJ VMEJS
VESAJ UTUYU EMBTN IPRJF MUHFR OFDKP FDVDA ZMPNF TTXEE IDBLK
QFNUT TATJD FGOXX IEVSE AWFMF OTKRB NHMEZ ISRFM EJYDA UJOTR
FPSPD AMUAV DUTIG FFUDG YDUOF SUVUE TJNUR JLTFN YYJVS BIZHF
GSBVK WEAOH EXWQO VSLKW DLBTS KWTUQ FROIV RFT

Séquence	Distance	Décomposition
NUFN	14	2×7

Exemple

KETVI YGP NU FN Z IE E WPUY PF NUF N JVFD JSEPE JHPSR KYSDF
UOAXD ERVIG PUESF LOKOO SBNII OAUVR KPM EM J GTSS AODEK
WUCPN MKYOF SVIZI YOUJQ A IE EM J CGXW OVTLK XPUDI EFIUL
FQAXJ V MEJ S VESAJ UTUYU EMBTN IPRJF MUH FR O FDKP FDVDA
ZMPNF TTXEE IDBLK QFNUT TATJD FGOXX IEVSE AWFMF OTKRB NHMEZ
ISRF M EJ YDA UJOTR FPSPD AMUAV DUTIG FFUDG YDUOF SUVUE
TJNUR JLTFN YYJVS BIZHF GSBVK WEAOH EXWQO VSLKW DLBTS KWTUQ
FRO IV RFT

Séquence	Distance	Décomposition
NUFN	14	2×7
EMJ	35	5×7
FRO	157	157
IEE	98	2×7^2
MEJ	93	3×31

Exemple

Séquence	Distance	Décomposition
NUFN	14	2×7
EMJ	35	5×7
FRO	157	157
IEE	98	2×7^2
MEJ	93	3×31

clé de longueur 7 ?

1. On garde une lettre sur 7 en partant de la première :
   KPEFFJSDUOOMSUOYEWPUVSUPFFPEFJIFBSDFUGDUJJFEQDTV
   Lettre la plus fréquente : F
2. On garde une lettre sur 7 en partant de la deuxième :
   ENENDHDEEOAEACFOEOULMAERRDNINDEMNRAPAFUELVGAOLUR
   Lettre la plus fréquente : E
3. TUWUJPFRSSUMOPSUMVDFEJMJOVFDUFVFHFUSVFOTTSSOVBQF
   Lettres les plus fréquentes : F,S,U
4. VFPFSSUVFBVJDNVJJTIQJUBFFDTBTGSOMMJPDUFJFBBHSTFT
   Lettre la plus fréquente : F
5. INUNEROILNRGEMIQCLEASTTMDATLTOETEEODUDSNNIVELSR
   Lettres les plus fréquentes : E,N
6. YZYJPKAGOIKTKKZAGKFXVUNUKZXKAXAKZJTATGUUYZKXKKO
   Lettre la plus fréquente : K
7. GIPVEYXPKIPSWYIIXXIJEYIHPMEQTXWRIYRMIYVRYHWWWWI
   Lettre la plus fréquente : I

1. On garde une lettre sur 7 en partant de la première :
   KPEFFJSDUOOMSUOYEWPUVSUPFFPEFJIFBSDFUGDUJJFEQDTV
   Lettre la plus fréquente : F → Première lettre de la clé : B
2. On garde une lettre sur 7 en partant de la deuxième :
   ENENDHDEEOAEACFOEOULMAERRDNINDEMNRAPAFUELVGAOLUR
   Lettre la plus fréquente : E → Deuxième lettre de la clé : A
3. TUWUJPFRSSUMOPSUMVDFEJMJOVFDUFVFHFUSVFOTTSSOVBQF
   Lettres les plus fréquentes : F,S,U → 3^e lettre de la clé : B ? O? Q?
4. VFPFSSUVFBVJDNVJJTIQJUBFFDTBTGSOMMJPDUFJFBBHSTFT
   Lettre la plus fréquente : F → Quatrième lettre de la clé : B
5. INUNEROILNRGEMIQCLEASTTMDATLTOETEEODUDSNNIVELSR
   Lettres les plus fréquentes : E,N → 5^e lettre de la clé : A ? J?
6. YZYJPKAGOIKTKKZAGKFXVUNUKZXKAXAKZJTATGUUYZKXKKO
   Lettre la plus fréquente : K → Septième lettre de la clé : G
7. GIPVEYXPKIPSWYIIXXIJEYIHPMEQTXWRIYRMIYVRYHWWWWI
   Lettre la plus fréquente : I → Septième lettre de la clé : E

Lettres les plus fréquentes : F,S,U $\rightarrow$ 3e lettre de la clé : B ? O? Q?

Si la lettre est O, le décalage est le suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
				↓		↓											↓									
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N

Peu probable !

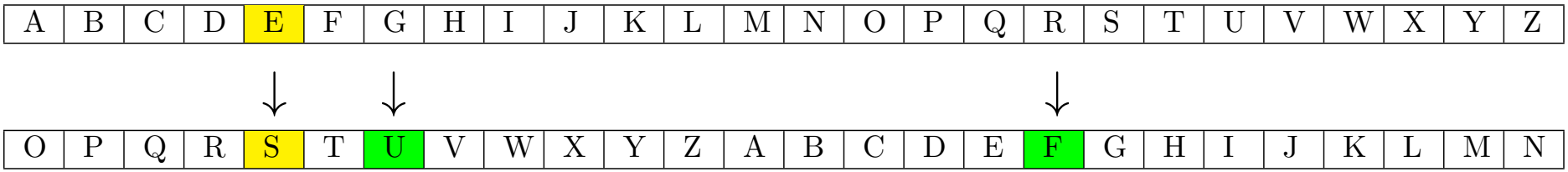
Si la lettre est Q, le décalage est le suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
		↓		↓											↓										
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P

Peu probable !

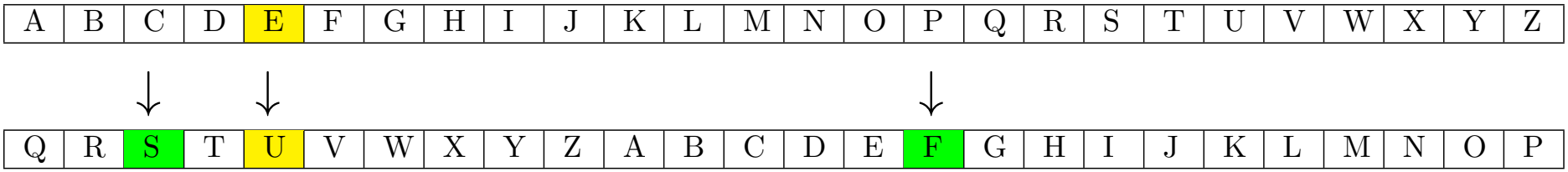
Lettres les plus fréquentes : F,S,U $\longrightarrow$ 3^{e} lettre de la clé : B ? O? Q?

Si la lettre est O, le décalage est le suivant :



Peu probable !

Si la lettre est Q, le décalage est le suivant :

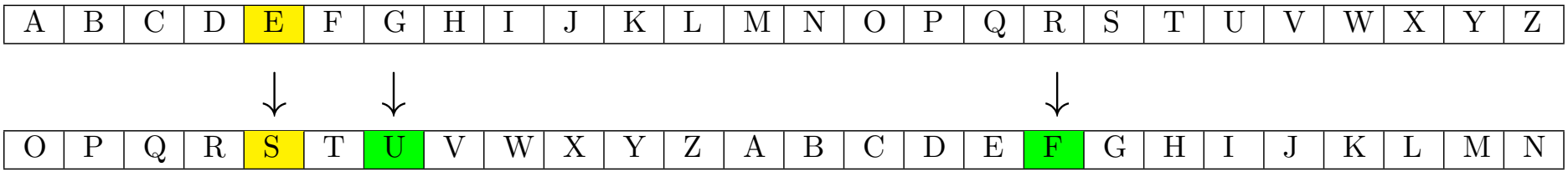


Peu probable !

La lettre de la clé est sûrement B

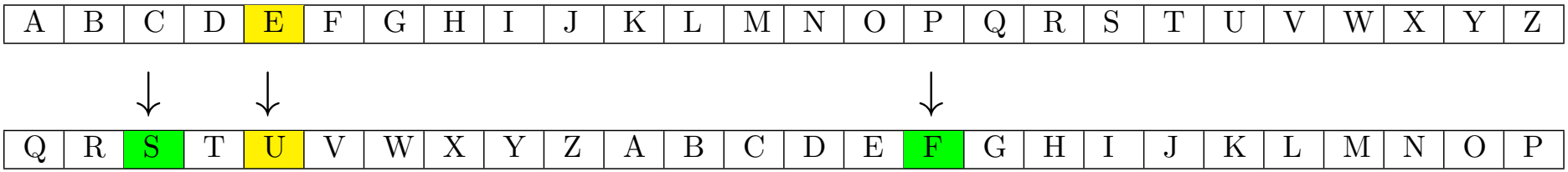
Lettres les plus fréquentes : F,S,U $\rightarrow$ 3^{e} lettre de la clé : B ? O? Q?

Si la lettre est O, le décalage est le suivant :



Peu probable !

Si la lettre est Q, le décalage est le suivant :



Peu probable !

La lettre de la clé est sûrement B

De même, pour la 5^{e} lettre de la clé, la plus probable est le A.

La clé est donc BABBAGE et le message clair :

Je suis contente de vous l'entendre dire. J'ai horreur de tout ce qui altère l'ignorance naturelle. L'ignorance est comme un fruit exotique délicat, vous le touchez et le parfum disparaît. Toute la théorie moderne de l'éducation est radicalement stupide. Fort heureusement, en Angleterre, l'éducation ne produit aucun effet d'aucune sorte. Sinon il s'ensuivrait de graves dangers pour les classes supérieures.

Oscar Wilde, *L'Importance d'être Constant*

Enigma, seconde guerre mondiale

Substitution polyalphabétique, système asynchrone.

Grands principes de la cryptographie moderne

- La sécurité ne doit pas reposer sur le secret de la méthode, mais sur le secret de la clé utilisée.
- Il n'y a pas de relation simple entre le clair et le chiffré.
- La modification d'une lettre du clair doit modifier l'ensemble du chiffré.

J'ai tout compris !

Je veux me connecter pour la première fois à Facebook. Je prends rendez-vous avec Mark Zuckerberg, pour que nous échangions une clé secrète.

J'ai tout compris !

Je veux me connecter pour la première fois à Facebook. Je prends rendez-vous avec Mark Zuckerberg, pour que nous échangions une clé secrète.

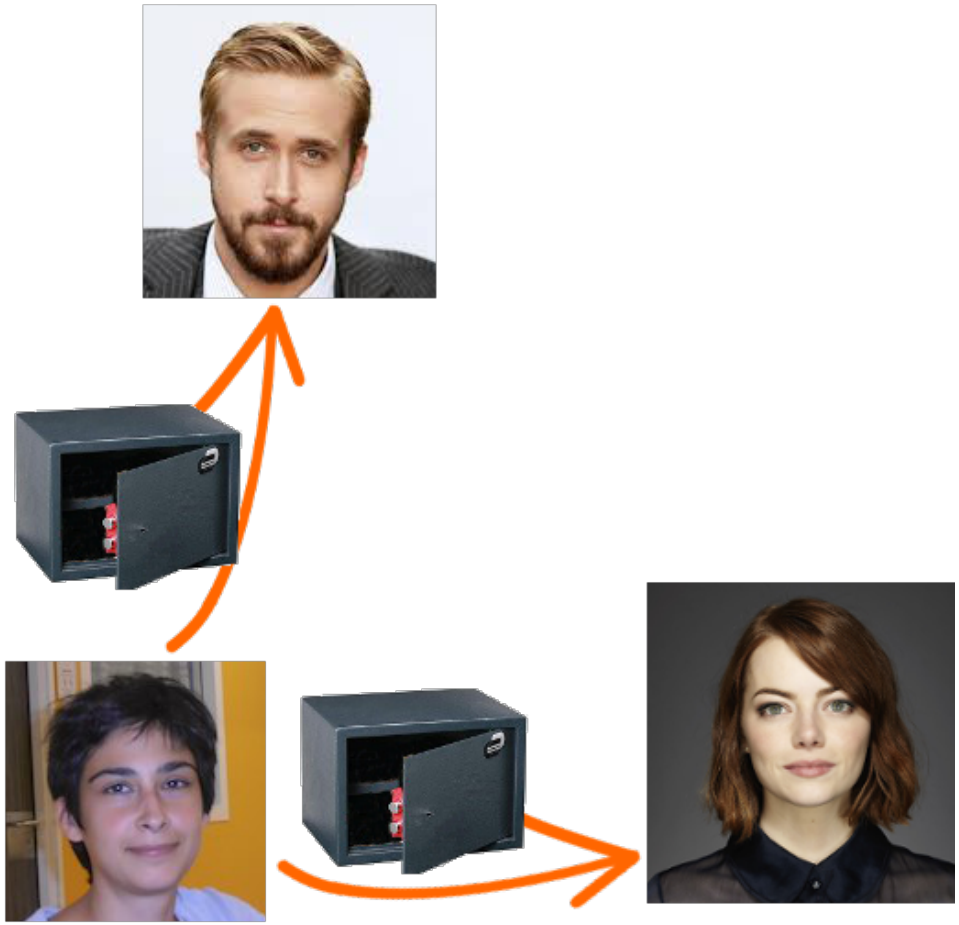
...

Est-il possible d'échanger des messages chiffrés sans échanger de clé ?

La cryptographie à clé publique

Ryan Gosling et Emma Stone veulent m'envoyer des messages secrets.

- Ils me demandent de leur envoyer un coffre-fort dont je suis la seule à avoir la clé.



La cryptographie à clé publique

Ryan Gosling et Emma Stone veulent m'envoyer des messages secrets.

- Ils me demandent de leur envoyer un coffre-fort dont je suis la seule à avoir la clé.
- Ils mettent leur message dedans et ferment le coffre.

La cryptographie à clé publique

Ryan Gosling et Emma Stone veulent m'envoyer des messages secrets.

- Ils me demandent de leur envoyer un coffre-fort dont je suis la seule à avoir la clé.
- Ils mettent leur message dedans et ferment le coffre.
- Ils me renvoient les coffres.

La cryptographie à clé publique

Ryan Gosling et Emma Stone veulent m'envoyer des messages secrets.

- Ils me demandent de leur envoyer un coffre-fort dont je suis la seule à avoir la clé.
- Ils mettent leur message dedans et ferment le coffre.
- Ils me renvoient les coffres.
- J'ouvre les coffres avec ma clé (secrète).

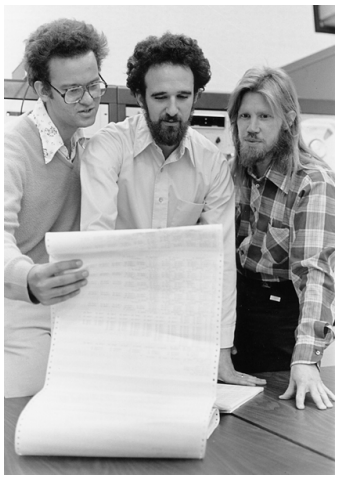




Principe mathématique de la cryptographie à clé publique

Le « coffre » est une fonction, qui transforme le message clair en le message chiffré. Elle doit être :

- facile à calculer (chiffrer le message, fermer le coffre)
- difficile à inverser (dur de retrouver le message pour un intrus, coffre dur à percer)
- facile à inverser pour une personne qui a une information supplémentaire (une clé, secrète).



Cette idée a été formulée par Merkle, Hellman, Diffie en 1975

Merci pour votre attention !