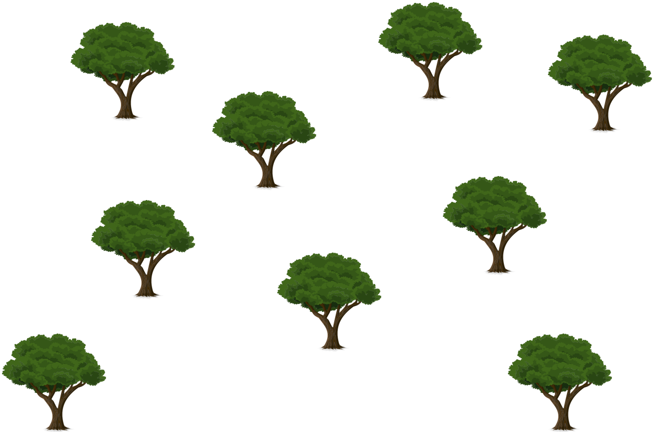
Une étincelle embrase-t-elle toute la forêt ?

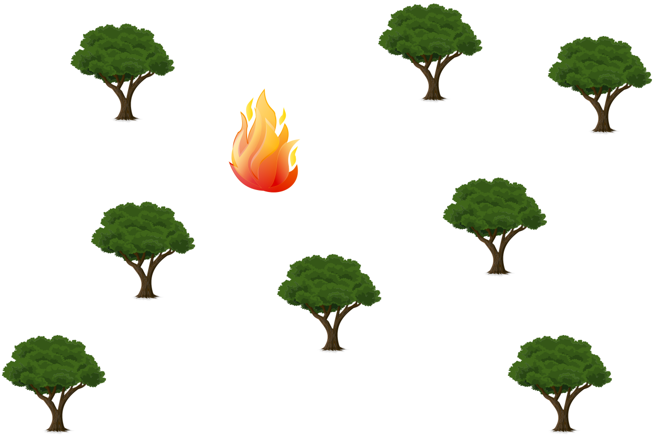
Marie Théret

LPMA, Université Paris Diderot (Paris VII)

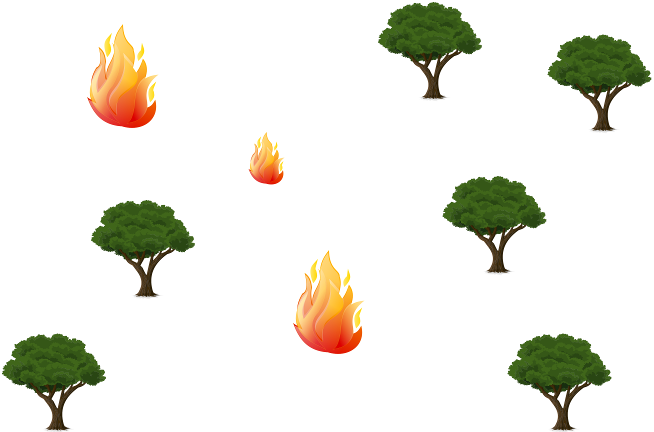
Feu de forêt



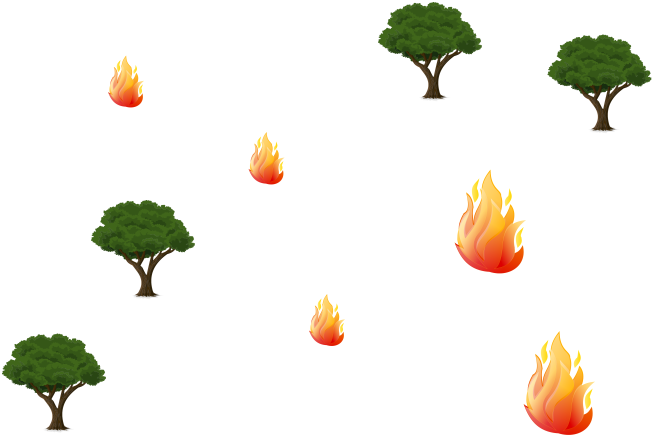
Feu de forêt



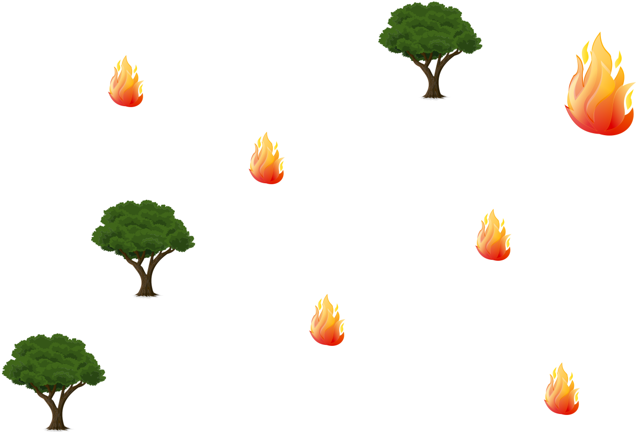
Feu de forêt



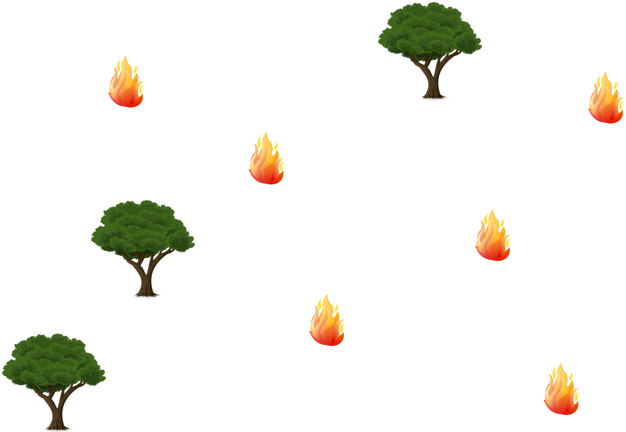
Feu de forêt



Feu de forêt



Feu de forêt



Question :
Est-ce que l'incendie reste localisé ?
Ou se répand-il à toute la forêt ?

Modélisation - étape 1 : choix de la boîte à outils

On choisit l'approche de la physique statistique :

- comprendre la propagation du feu dans la forêt toute entière en regardant uniquement la propagation du feu localement d'un arbre à l'autre
- hypothèse : la forêt est très très grande, elle contient beaucoup d'arbres !
- $\rightsquigarrow$ *recours aux probabilités*

Modélisation - étape 1 : choix de la boîte à outils

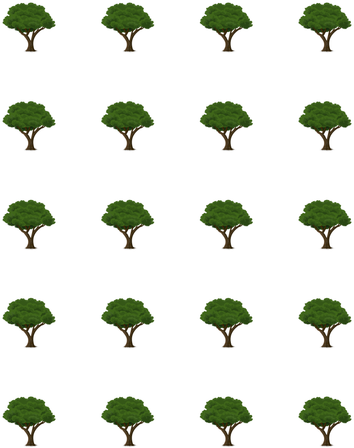
On choisit l'approche de la physique statistique :

- comprendre la propagation du feu dans la forêt toute entière en regardant uniquement la propagation du feu localement d'un arbre à l'autre
- hypothèse : la forêt est très très grande, elle contient beaucoup d'arbres !
- $\rightsquigarrow$ *recours aux probabilités*

Modélisation - étape 1 : choix de la boîte à outils

On choisit l'approche de la physique statistique :

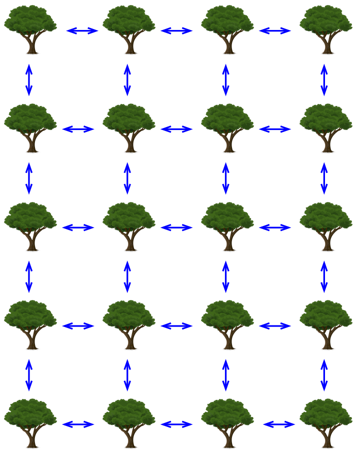
- comprendre la propagation du feu dans la forêt toute entière en regardant uniquement la propagation du feu localement d'un arbre à l'autre
- hypothèse : la forêt est très très grande, elle contient beaucoup d'arbres !
- $\rightsquigarrow$ *recours aux probabilités*



- les arbres sont parfaitement alignés
- le feu ne peut se propager qu'entre un arbre et ses 4 plus proches voisins
- le feu a une probabilité p $(0 < p < 1)$ de se transmettre entre chaque couple d'arbres voisins, indépendamment des autres couples d'arbres voisins

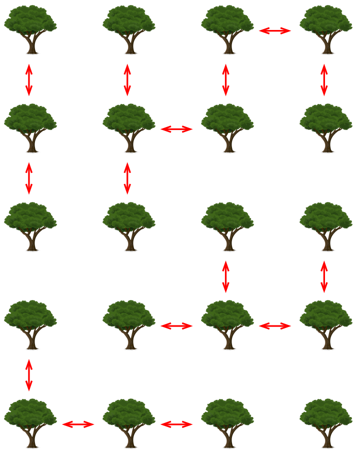
$\rightsquigarrow$ *le paramètre p quantifie le risque de propagation du feu dans la forêt.*

Le modèle de percolation - étape 2 : les simplifications



- les arbres sont parfaitement alignés
- le feu ne peut se propager qu'entre un arbre et ses 4 plus proches voisins
- le feu a une probabilité p ($0 < p < 1$) de se transmettre entre chaque couple d'arbres voisins, indépendamment des autres couples d'arbres voisins

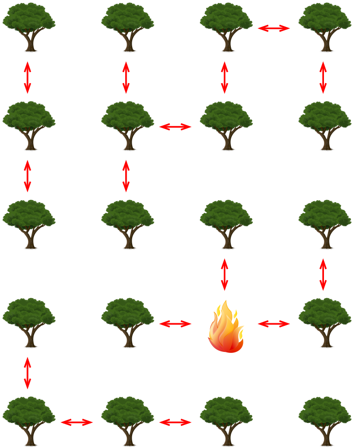
$\rightsquigarrow$ *le paramètre p quantifie le risque de propagation du feu dans la forêt.*



- les arbres sont parfaitement alignés
- le feu ne peut se propager qu'entre un arbre et ses 4 plus proches voisins
- le feu a une probabilité p ($0 < p < 1$) de se transmettre entre chaque couple d'arbres voisins, indépendamment des autres couples d'arbres voisins

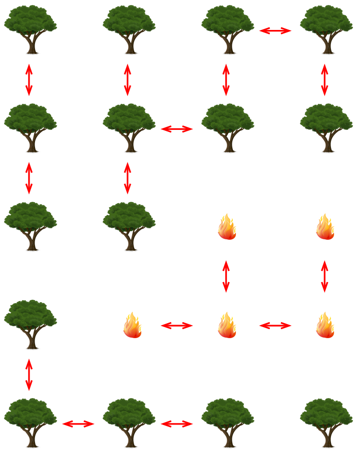
$\rightsquigarrow$ *le paramètre p quantifie le risque de propagation du feu dans la forêt.*

Le modèle de percolation - étape 2 : les simplifications



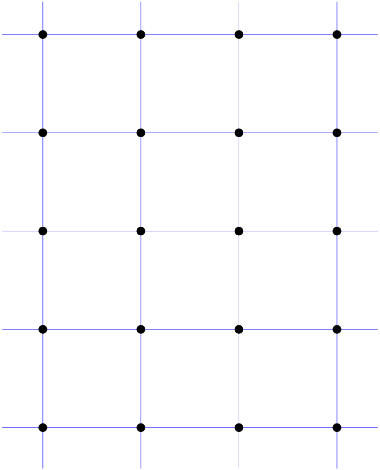
- les arbres sont parfaitement alignés
- le feu ne peut se propager qu'entre un arbre et ses 4 plus proches voisins
- le feu a une probabilité p $(0 < p < 1)$ de se transmettre entre chaque couple d'arbres voisins, indépendamment des autres couples d'arbres voisins

$\rightsquigarrow$ *le paramètre p quantifie le risque de propagation du feu dans la forêt.*



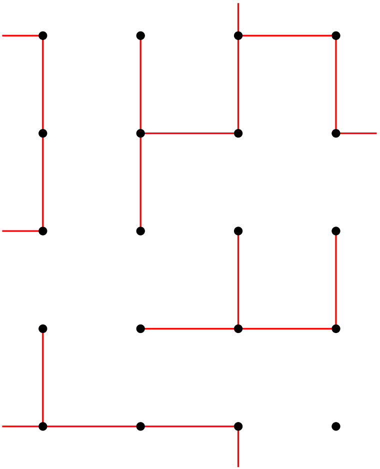
- les arbres sont parfaitement alignés
- le feu ne peut se propager qu'entre un arbre et ses 4 plus proches voisins
- le feu a une probabilité p ($0 < p < 1$) de se transmettre entre chaque couple d'arbres voisins, indépendamment des autres couples d'arbres voisins

$\rightsquigarrow$ *le paramètre p quantifie le risque de propagation du feu dans la forêt.*



S. Broadbent et J. Hammersley, 1957 :

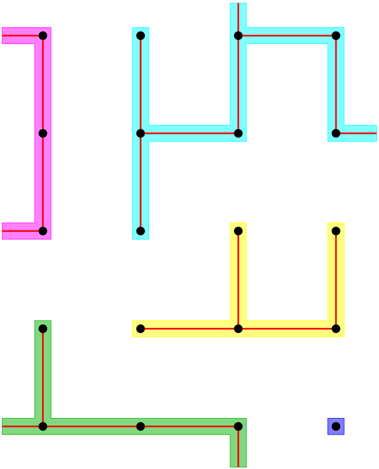
- on part du réseau carré (un quadrillage infini)
- on garde chaque arête de ce réseau avec probabilité p, on l'efface avec probabilité $1 - p$, pour obtenir un graphe aléatoire G_p
- on s'intéresse aux *composantes connexes* de G_p, i.e., les ensembles de sites de G_p reliés les uns aux autres



S. Broadbent et J. Hammersley, 1957 :

- on part du réseau carré (un quadrillage infini)
- on garde chaque arête de ce réseau avec probabilité p, on l'efface avec probabilité $1 - p$, pour obtenir un graphe aléatoire G_p
- on s'intéresse aux *composantes connexes* de G_p, i.e., les ensembles de sites de G_p reliés les uns aux autres

Le modèle de percolation : reformulation



S. Broadbent et J. Hammersley, 1957 :

- on part du réseau carré (un quadrillage infini)
- on garde chaque arête de ce réseau avec probabilité p, on l'efface avec probabilité $1 - p$, pour obtenir un graphe aléatoire G_p
- on s'intéresse aux *composantes connexes* de G_p, i.e., les ensembles de sites de G_p reliés les uns aux autres

Reformulation de la question

Un incendie peut s'étendre à toute la forêt si dans G_p on peut relier des sites arbitrairement éloignés les uns des autres.

$\rightsquigarrow$ **Question :**
Est-ce que les composantes connexes de G_p sont toutes finies ?
Ou y a-t-il des composantes connexes de taille infinie ?

Reformulation de la question

Un incendie peut s'étendre à toute la forêt si dans G_p on peut relier des sites arbitrairement éloignés les uns des autres.

$\rightsquigarrow$ **Question :**
Est-ce que les composantes connexes de G_p sont toutes finies ?
Ou y a-t-il des composantes connexes de taille infinie ?

Un modèle polyvalent

Autres interprétations possibles du modèles, par exemple :

- transmission d'une maladie au sein d'une population
  les sites du graphe sont les individus,
  les arêtes de G_p correspondent aux contaminations entre individus,
  p rend compte du risque de contagion
  $\rightsquigarrow$ **Question : y aura-t-il une épidémie de grande ampleur dans la population ?**
- écoulement de l'eau dans une roche (en dimension 3)
  les arêtes de G_p correspondent à de petits tuyaux qui laissent passer l'eau à travers la roche,
  p rend compte de la densité des tuyaux dans la roche
  $\rightsquigarrow$ **Question : la roche est-elle poreuse ?**

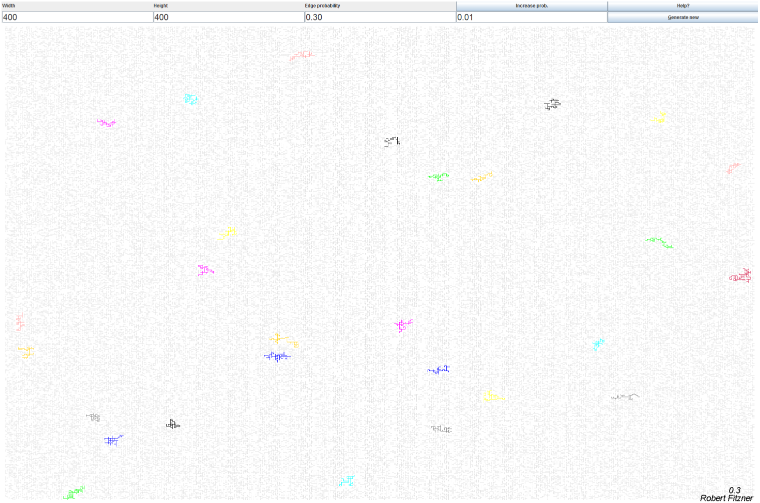
Un modèle polyvalent

Autres interprétations possibles du modèles, par exemple :

- transmission d'une maladie au sein d'une population
  les sites du graphe sont les individus,
  les arêtes de G_p correspondent aux contaminations entre individus,
  p rend compte du risque de contagion
  $\rightsquigarrow$ **Question : y aura-t-il une épidémie de grande ampleur dans la population ?**
- écoulement de l'eau dans une roche (en dimension 3)
  les arêtes de G_p correspondent à de petits tuyaux qui laissent passer l'eau à travers la roche,
  p rend compte de la densité des tuyaux dans la roche
  $\rightsquigarrow$ **Question : la roche est-elle poreuse ?**

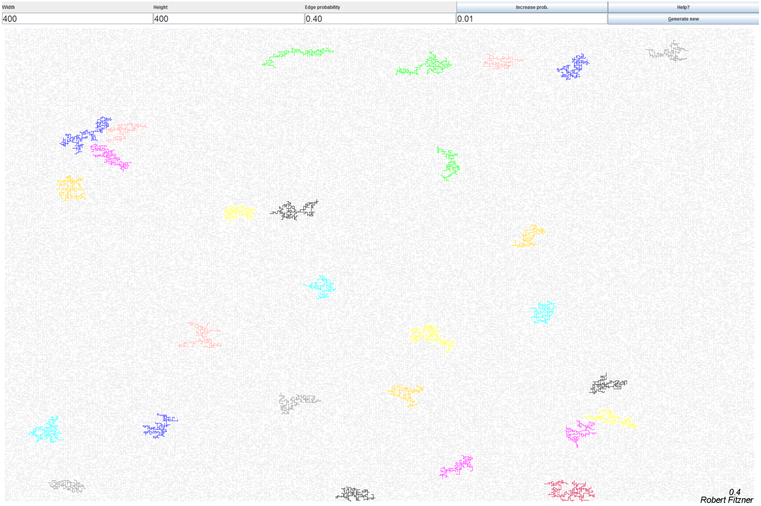
Quelques simulations de C. Lucas à l'aide d'un logiciel de R. Fitzner

$$p = 0,30$$



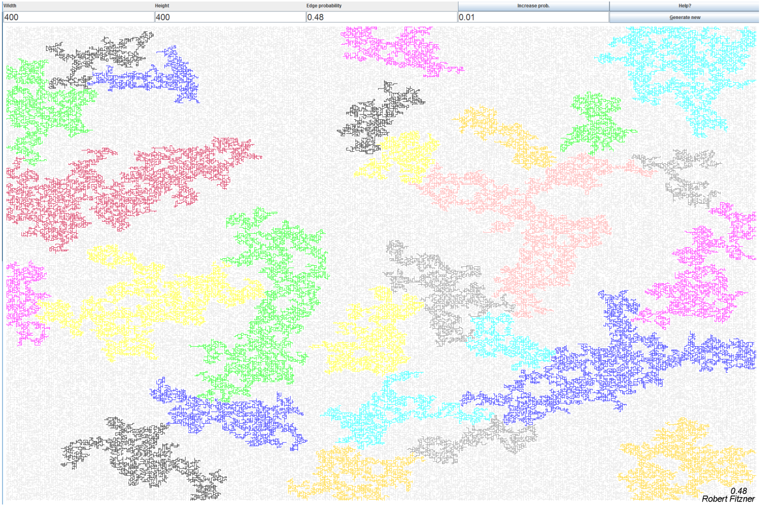
Quelques simulations de C. Lucas à l'aide d'un logiciel de R. Fitzner

$$p = 0,40$$



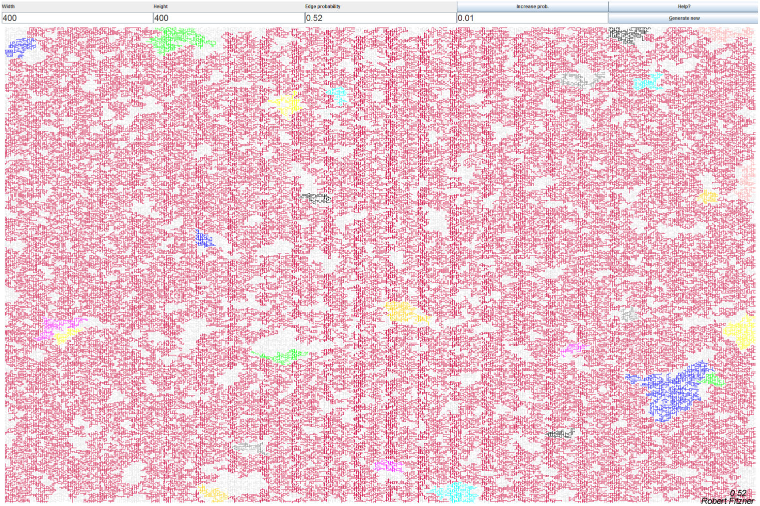
Quelques simulations de C. Lucas à l'aide d'un logiciel de R. Fitzner

$$p = 0,48$$



Quelques simulations de C. Lucas à l'aide d'un logiciel de R. Fitzner

$$p = 0,52$$



Quelques simulations de C. Lucas à l'aide d'un logiciel de R. Fitzner

$$p = 0,65$$

Transition de phase

Théorème (Broadbent et Hammersley, 1957 à 1959)

On considère le graphe aléatoire G_p obtenu à partir du réseau carré en dimension 2 ou 3. Il existe un paramètre critique p_c $(0 < p_c < 1)$ tel que

- si $p < p_c$, avec probabilité 1, il n'y a pas de composante connexe infinie dans G_p,
- si $p > p_c$, avec probabilité 1, il y a une unique composante connexe infinie dans G_p.

$\rightsquigarrow$ *changement brutal des propriétés de G_p quand le paramètre p dépasse une valeur critique p_c.*

- Le paramètre critique p_c :
  - en dimension 2, $p_c = \frac{1}{2}$ (Harry Kesten, 1980).
  - en dimension 3, on ne sait pas calculer p_c.
- Le comportement du modèle à $p = p_c$:
  - en dimension 2, pour $p = p_c = 1/2$, avec probabilité 1, il n'y a pas de composante connexe infinie dans $G_{1/2}$ (Ted Harris, 1960).
  - en dimension 3, **on conjecture qu'il n'y a pas non plus de composante connexe infinie dans G_p pour $p = p_c$ mais on ne sait pas le démontrer**.

$\rightsquigarrow$ *Travaux récents de Wendelin Werner (médaille Fields 2006) et Stanislav Smirnov (médaille Fields 2010).*

Ce qu'on sait... et ce qu'on ne sait pas !

- Le paramètre critique p_c :
  - en dimension 2, $p_c = \frac{1}{2}$ (Harry Kesten, 1980).
  - en dimension 3, on ne sait pas calculer p_c.
- Le comportement du modèle à $p = p_c$:
  - en dimension 2, pour $p = p_c = 1/2$, avec probabilité 1, il n'y a pas de composante connexe infinie dans $G_{1/2}$ (Ted Harris, 1960).
  - en dimension 3, **on conjecture qu'il n'y a pas non plus de composante connexe infinie dans G_p pour $p = p_c$ mais on ne sait pas le démontrer**.

$\rightsquigarrow$ *Travaux récents de Wendelin Werner (médaille Fields 2006) et Stanislav Smirnov (médaille Fields 2010).*

Ce qu'on sait... et ce qu'on ne sait pas !

- Le paramètre critique p_c :
  - en dimension 2, $p_c = \frac{1}{2}$ (Harry Kesten, 1980).
  - en dimension 3, on ne sait pas calculer p_c.
- Le comportement du modèle à $p = p_c$:
  - en dimension 2, pour $p = p_c = 1/2$, avec probabilité 1, il n'y a pas de composante connexe infinie dans $G_{1/2}$ (Ted Harris, 1960).
  - en dimension 3, **on conjecture qu'il n'y a pas non plus de composante connexe infinie dans G_p pour $p = p_c$ mais on ne sait pas le démontrer**.

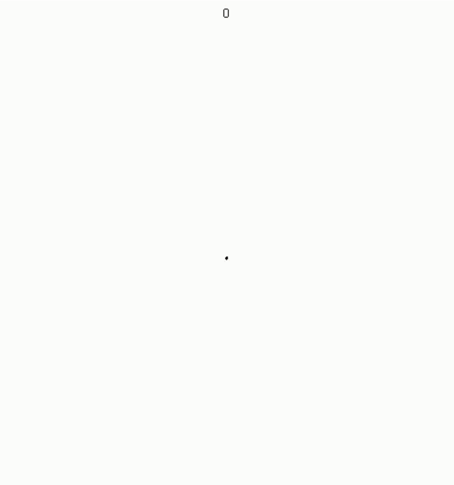
$\rightsquigarrow$ *Travaux récents de Wendelin Werner (médaille Fields 2006) et Stanislav Smirnov (médaille Fields 2010).*

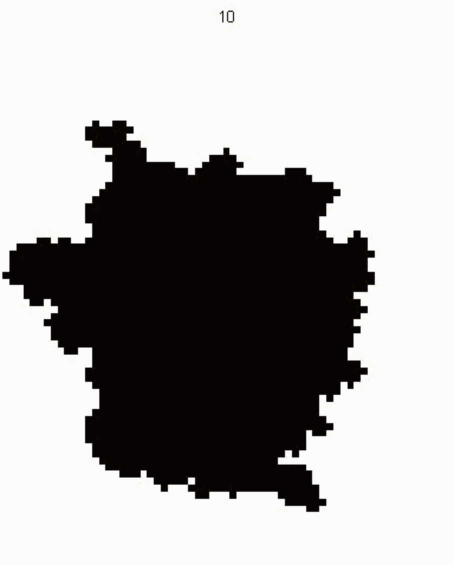
- modèle de percolation de premier passage (Hammersley et Welsh, 1965) :
  à chaque arête du réseau carré (en dimension 2 ou 3) on associe, indépendamment des autres arêtes et toujours selon la même loi, une variable aléatoire qui quantifie **le temps nécessaire pour traverser l'arête**
  (temps nécessaire pour que le feu se propage, que les individus se contaminent, que l'eau circule...)
- **Question :** à quoi ressemble B_t, l'ensemble des sites du réseau qu'on peut atteindre depuis l'origine avant le temps t ?
  B_t représente l'ensemble des arbres brûlés avant le temps t, les personnes contaminées par un virus, la partie de la roche mouillée...

Raffinement du modèle : vitesse de propagation

- modèle de percolation de premier passage (Hammersley et Welsh, 1965) :
  à chaque arête du réseau carré (en dimension 2 ou 3) on associe, indépendamment des autres arêtes et toujours selon la même loi, une variable aléatoire qui quantifie **le temps nécessaire pour traverser l'arête**
  (temps nécessaire pour que le feu se propage, que les individus se contaminent, que l'eau circule...)
- **Question :** à quoi ressemble B_t, l'ensemble des sites du réseau qu'on peut atteindre depuis l'origine avant le temps t ?
  B_t représente l'ensemble des arbres brûlés avant le temps t, les personnes contaminées par un virus, la partie de la roche mouillée...

Quelques simulations de J. Bettinelli : évolution de B_t




10

Théorème de forme

Théorème (Richardson 1973, Cox et Durrett 1981, Kesten 1986)

L'ensemble B_t/t ressemble de plus en plus, quand t devient grand, à une forme limite déterministe $\mathcal{B}$.

Question : comment la forme asymptotique $\mathcal{B}$ dépend-elle de la loi des temps associés aux arêtes du réseau ?

On ne le sait toujours pas...

Théorème de forme

Théorème (Richardson 1973, Cox et Durrett 1981, Kesten 1986)

L'ensemble B_t/t ressemble de plus en plus, quand t devient grand, à une forme limite déterministe $\mathcal{B}$.

Question : comment la forme asymptotique $\mathcal{B}$ dépend-elle de la loi des temps associés aux arêtes du réseau ?

On ne le sait toujours pas...